XIII. CORRÉLATIONS E.P.R.
La Statistique et les mystères de la causalité.

Pour couronner la discussion sur la causalité amorcée au chapitre **I** et poursuivie en **IV.2** puis **XII.6**, nous allons étudier soigneusement un exemple issu de la Physique, dans lequel la causalité est fortement mise à l'épreuve : l'*expérience d'Einstein, Podolski, Rosen* que nous abrégerons en *expérience E.P.R.* Comme toute expérience de Mécanique quantique, celle-ci fait appel à la Statistique, et par conséquent son interprétation fait appel au Calcul des probabilités. Le phénomène étudié dans cette expérience est intéressant non (pour le moment) par ses applications technologiques, mais parce qu'il fait apparaître le monde quantique de manière si flagrante qu'aucune échappatoire n'est plus possible. Pour notre discussion sur la corrélation et la causalité, il est intéressant parce que, étant situé à la frontière de ce qui est compris et ce qui ne l'est pas encore, n'étant donc pas encore soumis à des certitudes vraies ou fausses mais seulement à des doutes, il fournit un exemple de confrontation directe entre l'objectif et le subjectif : les corrélations observées dans l'expérience E.P.R. (appelées de ce fait *corrélations E.P.R.*) sont dépourvues à la fois de l'antériorité et de la relation de nécessité ; la Mécanique quantique les prédit et les décrit, mais nul n'y perçoit une relation de nécessité causale. Enfin, l'absence d'antériorité est expérimentalement établie.

Par ailleurs, l'interprétation de l'expérience par le Calcul des probabilités (effectuée par J. S. Bell) révèle remarquablement bien les évidences erronées que nous pouvons véhiculer inconsciemment en appliquant les règles de ce Calcul. L'analyse de l'expérience E.P.R. va donc nous servir à mieux comprendre ce qu'est *réellement* un événement.

XIII. 1. Description du problème.

Einstein, Podolski, et Rosen avaient imaginé cette expérience de pensée en 1935 [(1)]. À cette époque toutefois l'expérience ne pouvait pas être réalisée (la technologie ne le permettait pas), et même si cela avait été possible, on n'aurait pas pu en tirer des résultats concluants. La première expérience concrète qui corresponde au modèle imaginé tout en étant absolument

---

(1) *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete ?* Physical Review, vol **47**, 1935, pp. 777 – 780. L'expérience que nous décrivons ici (fig. 58) n'est pas exactement celle de cet article, mais — conformément à une tradition établie — la version revue et corrigée par David Bohm.

concluante et incontestable, a été réalisée par Alain Aspect à l'Institut d'Optique d'Orsay (1982). Il n'y a pas la place ici pour faire un exposé historique de la question[(2)]. Mais nous allons étudier la question dans l'état où elle peut être formulée aujourd'hui, en ignorant les étapes historiques de clarification par lesquelles elle est passée. Voici donc le problème.

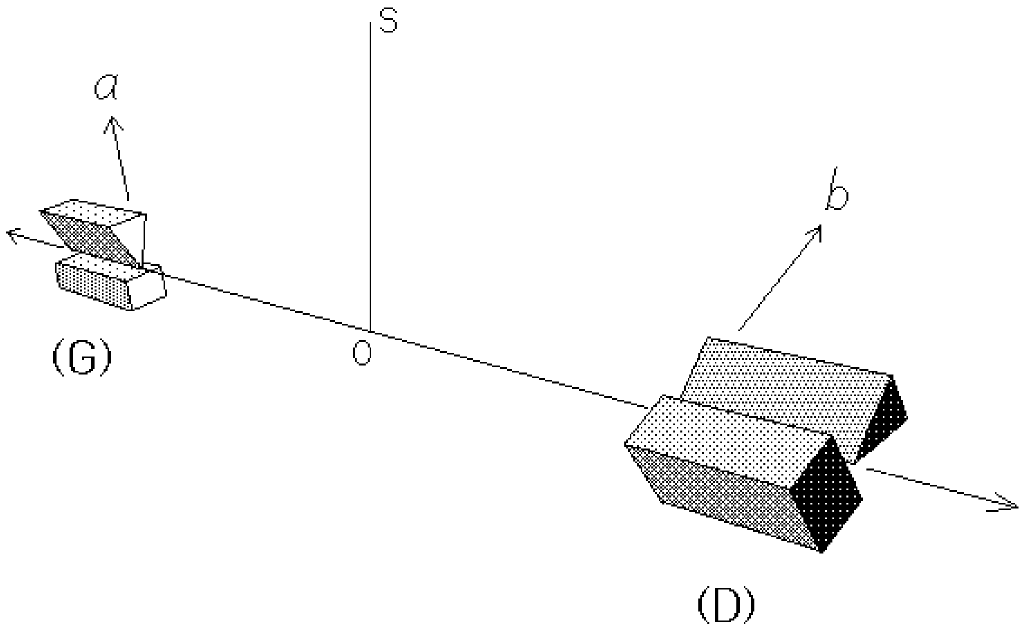


figure 58

On effectue l'expérience représentée sur la figure 58. Un faisceau de molécules diatomiques est préparé dans un état "singulet", c'est-à-dire de moment cinétique (spin) nul. Pour le lecteur qui ne comprend pas ces termes, il suffit de savoir qu'on prépare ces molécules de telle façon que lorsqu'elles se diviseront, leurs deux composants se comporteront symétriquement. Ce faisceau circule de S vers O. En pratique le faisceau est produit en chauffant dans un four un métal dont la vapeur est formée de molécules diatomiques, et en filtrant les vapeurs qui en sortent ; on filtre la direction de propagation avec des diaphragmes qui absorbent tout ce qui ne part pas dans la bonne direction, et on filtre l'état singulet avec des champs magnétiques qui dévient tout ce qui possède un moment cinétique non nul. En O ces molécules sont cassées en deux et deux atomes de spins

(2) Un bon exposé de synthèse est *Bell's Theorem : experimental tests and implications* by John F. Clauser and Abner Shimony (Reports on Progress in Physics, vol. **41**, 1978 pages 1181 – 1927). Son seul défaut est d'être antérieur à l'expérience d'Aspect. Une autre référence plus récente et plus accessible est le livre de Franco Selleri *Le grand débat de la théorie quantique.* Flammarion, Paris, 1986.

opposés partent de O dans des directions également opposées (en pratique : on casse les molécules avec un laser, et on filtre encore les directions de propagation avec des diaphragmes). Les deux atomes issus de cette fission ont des spins opposés d'après la conservation du moment cinétique. On dispose sur leurs trajectoires respectives des aimants de Stern-Gerlach qui permettront de mesurer les spins des deux atomes. Là encore, il n'est pas demandé au lecteur de savoir ce qu'est un aimant de Stern-Gerlach ; il suffit de comprendre qu'il s'agit d'un dispositif permettant de mesurer un paramètre (le spin) qui ne peut prendre que les valeurs $+1$ ou -1. Ces détails pratiques sont donnés pour fixer les idées, mais n'interviennent pas au niveau du principe. D'ailleurs dans l'expérience d'Alain Aspect on utilisait des atomes de Calcium (et non des molécules diatomiques), qui après excitation par laser se désexcitaient spontanément en émettant deux photons jumeaux de polarisations opposées, et on mesurait ensuite la polarisation des photons avec des polariseurs spéciaux. La désexcitation des atomes de Calcium ne donnant des photons jumeaux que dans des conditions très spécifiques, on imagine le soin qu'exigeaient la réalisation pratique de ces conditions ; de même pour les différents filtrages. Nous passons sur ces problèmes techniques complexes. Comme toujours en Physique, on ne peut réaliser expérimentalement une situation idéalement simple qu'au prix d'appareillages complexes.

Le dispositif est supposé symétrique ; en particulier, les deux analyseurs (aimants de Stern-Gerlach ou polariseurs d'Aspect) sont supposés rigoureusement identiques ; dans l'expérience ils ne doivent différer que par leur orientation.

Le trait essentiel du dispositif est le suivant : les deux aimants peuvent tourner autour de leur axe longitudinal, matérialisé par la trajectoire de l'atome. On distinguera l'aimant de gauche (G) et celui de droite (D). Appelons a la direction selon laquelle est orienté l'aimant de gauche et b celle de l'aimant de droite. Puisque les aimants tournent autour de leurs axes longitudinaux, qui sont fixes, les directions a et b peuvent être repérées chacune par un seul paramètre, un angle variant de 0 à 2π.

Dans le langage imagé et souvent trompeur de la Mécanique quantique, on dit usuellement, lorsque l'aimant de Stern-Gerlach pointe dans la direction a, qu'il "mesure la composante selon a du spin". Le spin de l'atome se manifeste au cours de la traversée de l'aimant par une déviation dans la direction a, qui est soit positive (vers le "haut" de l'aimant), soit négative (vers le "bas" de l'aimant). L'amplitude de la déviation dépend des caractéristiques de l'aimant (longueur, champ magnétique) mais est en valeur absolue la même pour tous les atomes préparés ; seul le sens (le signe) de déviation varie avec l'atome individuel. Ce signe est aléatoire : il y a toujours une chance sur deux d'observer + ou −. La 'mesure du spin" consiste à constater si l'atome est dévié positivement ou négativement. On dira que la composante selon a du spin est $+\frac{1}{2}\hbar$ dans le premier cas et $-\frac{1}{2}\hbar$ dans le second cas. Pour simplifier, on omettra $\hbar$ et on indiquera seulement le signe $+1$ ou -1. Le lecteur qui n'est pas encore familier avec la Mécanique quantique ne doit pas chercher à comprendre ces phrases autrement que comme une manière tortueuse d'exprimer le constat de ces déviations.

La Mécanique quantique affirme qu'il est impossible de mesurer en même temps les composantes du spin d'un même atome dans deux directions orthogonales (principe de Heisenberg dit d'incertitude ou de complémentarité). Plus exactement : l'état de spin n'est pas une propriété intrinsèque de l'atome que l'appareil mesure, mais une propriété de l'atome relative à l'appareil. Encore plus exact : ce n'est pas une propriété relative à l'appareil lui-même, mais à ses symétries internes (un autre appareil complètement différent, mais présentant les mêmes symétries internes, mesurerait aussi (éventuellement sous une forme autre qu'une déviation) la "composante selon a du spin". L'aimant de Stern-Gerlach que traverse l'atome lui fournit un environnement spatial formé d'un champ magnétique à fort gradient, le champ *et* son gradient étant dirigés selon a. On ne peut certes pas tourner l'aimant globalement autour de l'axe a sans dérégler l'expérience car l'atome doit traverser l'aimant longitudinalement ; mais l'atome est localisé et sa trajectoire est rectiligne, de sorte qu'à chaque instant, l'atome "voit" son environnement immédiat (le champ magnétique local) comme invariant par les rotations autour de l'axe a. Ce qui se passe loin de l'atome (la forme particulière des fers) n'influe pas sur lui et la direction longitudinale sert uniquement à le maintenir dans l'entrefer tout au long de sa trajectoire. (On pourrait aussi exprimer cela en disant que le spin n'est modifié ni par le mouvement rectiligne uniforme, ni par les valeurs du champ magnétique en dehors du voisinage immédiat de l'atome).

Voici maintenant le but qu'Einstein, Podolski, et Rosen souhaitaient donner à cette expérience. Si on mesure le spin d'un atome selon la direction a dans l'aimant de gauche G *et* le spin selon la direction b de son jumeau (issu de la même molécule) dans l'aimant de droite D, alors, si $a = b$, ils seront opposés (les déviations seront opposées). C'est bien ce que prédit aussi la Mécanique quantique. Par conséquent, si le spin selon b du jumeau de droite est $+1$ (respectivement : -1), on est assuré qu'il serait *forcément* -1 (respectivement : $+1$) pour le jumeau de gauche si les deux aimants pointaient dans la même direction. Sachant cela, on va prendre b *orthogonal* à a et mesurer le spin du jumeau de droite selon b. Ainsi on peut déduire le spin selon b du jumeau de gauche (c'est l'opposé du spin mesuré à droite) ; et comme on a mesuré directement le spin selon a du jumeau de gauche, on connaît, pour ce jumeau, à la fois le spin selon a et selon b. Einstein, Podolski, et Rosen concluent alors que par cette expérience on peut connaître à la fois le spin selon a et le spin selon b d'une particule (ici, le jumeau de gauche).

Au début de leur article de 1935 ils définissent ainsi ce qu'est un *élément de réalité* :

> Si, sans perturber en aucune manière un système, nous pouvons prédire avec certitude (c'est-à-dire avec une probabilité égale à un) la valeur d'une grandeur physique, alors il existe un élément de réalité physique correspondant à cette grandeur physique.

Et peu avant ils affirment ceci :

> Quel que soit le sens qu'on donne au terme *complet*, pour qu'une théorie soit complète il semble que l'exigence suivante soit nécessaire : *chaque élément de la réalité physique doit avoir sa contrepartie dans la théorie physique.* Nous appellerons cela la condition de complétude.

La Mécanique quantique prédit que si on sait que le spin du jumeau de gauche selon a est, disons, $+1$, alors il y a exactement autant de chances a priori de trouver $+1$ que -1 pour l'autre jumeau selon la direction orthogonale b, et cela est entièrement compatible avec les présupposés d'Einstein, Podolski, et Rosen : cela veut dire que la mesure indirecte du spin selon b (c'est-à-dire la mesure effectuée sur le jumeau de droite afin de ne pas perturber celui de gauche) donnera une fois sur deux $+1$ et une fois sur deux -1.

La Mécanique quantique de Bohr et Heisenberg affirme expressément dans ses présupposés que le spin ne peut être un élément de réalité que dans une seule direction à la fois. Toutefois il s'agit là d'un principe *qualitatif* de la Mécanique quantique, dont il est toujours possible de nier la validité car il ne peut être vérifié directement par l'expérience. Cependant, la Mécanique quantique propose aussi des prédictions quantitatives : si b fait un angle θ non nécessairement droit avec a, les probabilités d'avoir $+1$ et -1 pour l'autre jumeau seront respectivement $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ et $\sin^2 \frac{\theta}{2}$. Nous verrons que cette prédiction est incompatible avec les présupposés d'Einstein, Podolski, et Rosen, *même sans recourir au principe qualitatif susmentionné* (voir section **XIII.4** ci-après et notamment la figure 62), sauf justement dans le cas de directions orthogonales ou parallèles, qui sont des cas particuliers trompeurs. Si ces cas particuliers trompeurs n'avaient pas existé, le débat entre les «partisans d'Einstein» et les «partisans de Bohr» aurait été tranché bien plus vite.

S'il était possible de constater d'abord la déviation de l'atome dans un aimant selon a puis de faire passer le même atome dans un second aimant pour en mesurer cette fois le spin selon b, cette expérience compliquée ne serait pas nécessaire. Mais tout le problème provient de ce que la mesure effectuée dans le premier aimant perturbe l'état de l'atome : son spin est de l'ordre de $\hbar \sim 10^{-34}$ (il vaut $\pm\frac{1}{2}\hbar$), et la déviation dans le champ magnétique est l'effet d'une action du champ sur la particule, dont l'intensité est également de l'ordre de $\hbar$. Pour mesurer le spin on a donc exercé une action physique aussi grande que la grandeur à mesurer. C'est comme si on voulait mesurer l'épaisseur d'un rouleau de pâte avec un pied à coulisse qui s'enfonce dedans. Einstein partait de ce constat, que la nature est ainsi faite que toute mesure utilise des champs ou de la lumière qui sont impalpables pour des corps macroscopiques, mais qui ne le sont plus pour des atomes. D'où cette expérience qui permet de mesurer le spin selon b du jumeau de gauche en ne perturbant que le jumeau de droite, donc avec un procédé impalpable pour le jumeau de gauche, dont on mesure alors indirectement et "sans le perturber d'aucune manière" le spin selon b.

En étudiant bien les arguments des uns et des autres (ou pour simplifier : de l'un – Einstein – et de l'autre – Bohr), on peut voir que le désaccord (ou la différence) entre les deux conceptions concernait la nature exacte de ce qui est mesuré ; Einstein voulait que le spin fût une caractéristique intrinsèque de l'atome, indépendante de l'appareil, et en particulier indépendante de la position de l'appareil, tandis que Bohr, apparemment parce qu'il arrivait mieux à l'accepter, admettait que le spin est une caractéristique de l'atome *relative* à son environnement. Le titre de l'article d'Einstein, Podolski et Rosen "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete ? " suggère déjà l'idée sous-jacente que le spin serait fixé au moment où la molécule se divise en deux au point O, de sorte que le signe que prendra la déviation pendant la traversée de l'aimant sera déterminé à l'avance pour toute direction a ou b. Admettant provisoirement que le spin attribué à chacun des deux jumeaux au moment de la fission est totalement aléatoire et imprévisible comme le point où vient s'arrêter une bille de roulette, la Mécanique quantique devrait au moins, pour pouvoir être considérée comme complète, permettre de prédire le résultat de la déviation à partir de l'état du jumeau immédiatement après la fission. C'est-à-dire que, pour être complète, elle devrait inclure dans la théorie des paramètres décrivant cet état, de telle sorte que, même s'il est techniquement difficile de les mesurer, du moins leur valeur détermine le sens de la déviation. Einstein, Podolski, et Rosen acceptent le constat qu'on ne peut pas mesurer ces paramètres avec de la lumière ou des champs magnétiques sans les perturber, car ces phénomènes sont trop brutaux ; mais l'état du jumeau est, selon eux, quand même déterminé, et on pourrait le mesurer sans le perturber si on découvrait des environnement physiques beaucoup plus ténus que les champs magnétiques, qui exerceraient sur la particule une action bien plus faible que la grandeur à mesurer. La Mécanique quantique est donc incomplète car elle écarte a priori de la théorie ce que des mesures moins brutales révéleraient.

Bohr interprétait cela différemment. Pour le comprendre on peut s'aider d'une comparaison : imaginons un sondage d'opinion avec des questions du type "êtes-vous plutôt satisfait ou plutôt insatisfait de la politique du gouvernement en matière de X ?" La réponse du sondé sera $+1$ s'il est "plutôt satisfait" et -1 s'il est "plutôt insatisfait". Il y a bien les sans opinion, mais cela existe aussi dans les expériences du type E.P.R. car il y a toujours des atomes pour lesquels la mesure ne marche pas ; on ne les comptabilise pas. Le X dans la question représente un thème : éducation, défense, diplomatie, urbanisme, aménagement du territoire, recherche, agriculture, etc. Si on compare avec nos atomes, le thème X joue le rôle de la direction a. L'état singulet correspondrait à des couples où chacun contredit systématiquement son conjoint. Préparer les molécules dans l'état singulet correspond dans la comparaison à sélectionner ces couples pour faire le sondage parmi eux seuls. Il ne semble pas raisonnable de croire qu'il existe un "état objectif du sondé", décrit par des paramètres bien précis et tels que, si on les connaissait tous, on pourrait prédire sa réponse quel que soit X. Même si on fait abstraction de détails tels que l'influence du sondeur, l'humeur du jour, etc, il semble assez plausible que la question puisse prendre le sondé au dépourvu, de telle sorte qu'il improvise une réponse qui ne correspond même pas à sa nature ou à ses préférences politiques. Cela n'empêchera pas le sondage d'être statistiquement correct et de donner à la fourchette près les mêmes résultats que n'importe quel autre, effectué dans la population française au même moment ; c'est là le miracle des probabilités. Cette comparaison ne doit évidemment pas être prise au pied de la lettre ; son seul but ici est de montrer qu'il n'y a aucune *évidence a priori* pour que la réponse du sondé soit objectivement déterminée à l'avance par un "état". En vertu de quelle autre évidence pourrions-nous affirmer que la réponse des atomes est objectivement déterminée à l'avance par son "état" ? Parce que l'atome serait un être non vivant, contrairement au sondé ? Mais c'est l'expérience et non la raison a priori qui nous a montré que les êtres vivants ne sont pas réductibles à un déterminisme simple. Donc seule l'expérience peut nous faire savoir si les atomes sont ou non réductibles à un déterminisme simple. Ou parce que les êtres vivants seraient complexes, tandis que les atomes seraient simples ? Là aussi, c'est l'expérience et non la raison a priori qui a montré que le mouvement des planètes, ou les phénomènes électriques, obéissent à des lois simples, et qu'il n'en va pas ainsi pour le vivant. Le fait que les atomes soient “les composants élémentaires” de la matière ne prouve pas qu'ils sont obligatoirement plus simples ; justement, l'un des principaux enseignements du Calcul des probabilités est que des phénomènes extrêmement complexes peuvent sembler simples à plus grande échelle, soit par l'effet de la loi des grands nombres (cf. chapitre **VII**), soit par la transformation du chaos en hasard (sections **I.4**, **I.5**, **II.6**, **IV.2**).

Ces remarques devraient aider à comprendre la position de Bohr, plus basée sur le doute. D'un autre côté, la conviction exprimé par Einstein qu'il *doit* y avoir une explication (“Dieu ne joue pas aux dés !”) est nécessaire pour chercher. La science serait impensable sans la conviction que “Dieu est mathématicien”.

En ce qui concerne le spin des atomes, il faut se garder d'introduire implicitement des “évidences” issues d'un autre domaine déjà connu. L'*état* dont parle la Mécanique quantique n'est pas l'état de l'atome jumeau, mais l'état du système atome + champ magnétique à fort gradient, ou bien l'état de l'atome relatif à l'environnement. Ainsi le langage usuel de la Mécanique quantique (encore marqué par les conceptions classiques) est trompeur ; on ne devrait pas dire “l'appareil orienté selon a mesure la composante du spin selon a” comme s'il existait un spin intrinsèque dont seule la composante serait relative, mais “on mesure le spin de l'atome dans l'environnement a”.

Jusqu'ici cependant nous rencontrons des différences d'opinion ou des différences d'interprétation, et nous ne pouvons pas trancher le débat. Nous ne pouvons pas prouver que la position défendue par Einstein est fausse. Ni – même lorsque les prédictions quantitatives de la Mécanique quantique sont vérifiées – prouver que Bohr a raison. Une chose est l'acte purement technique qui consiste à appliquer le formalisme de la Mécanique quantique et à effectuer une expérience pour constater l'accord entre la théorie et l'expérience, une toute autre chose est l'interprétation. Est-il possible de trancher expérimentalement ce débat d'interprétation ? En 1964 parut un article de J. S. Bell(3) qui répondit positivement à cette question. Mais bien entendu, *ipso facto* les interprétations se trouvent précisées – par les conditions de l'expérience – et par conséquent rendues plus étroites. C'est donc l'analyse des conditions exactes de l'expérience, où la Statistique joue comme toujours un rôle clé, que je voudrais présenter ici pour conclure cet ouvrage, plutôt comme une question ouverte que comme un exemple pédagogique.

Les arguments présentés par Bell dans son article sont repris ici, mais

(3) J.S. Bell *On the Einstein Podolski Rosen Paradox* (Physics, Vol. **1**, *N^o* 3, pp. 195 – 200.)

fortement modernisés, le sujet ayant bénéficié depuis trente ans d'une lente mais considérable maturation.

Nous prenons donc l'expérience de principe décrite sur la figure 58, qui ne diffère d'expériences réelles que par des détails inessentiels. Les molécules diatomiques peuvent être produites en quantité pratiquement illimitée ; les échantillons statistiques seront donc aussi nombreux que nécessaire. Nous allons effectuer des observations de la façon suivante : les directions a de l'aimant de gauche et b de l'aimant de droite sont réglables à volonté. Effectuons une première série de n observations avec $a = a_1$ et $b = b_1$. Remplissons un tableau comme le suivant :

molécule N^o :	gauche (a_1)	droite (b_1)
1	$+1$	$+1$
2	$+1$	-1
3	$+1$	-1
4	-1	-1
5	$+1$	$+1$
6	-1	$+1$
7	-1	-1
...	...	...
n	-1	$+1$

La première colonne indique le numéro d'ordre des observations : pour chaque molécule arrivant en O il y aura deux atomes jumeaux, l'un à gauche et l'autre à droite, qui seront analysés par l'aimant respectif et seront déviés positivement $(+1)$ ou négativement (-1).

Une première propriété d'invariance nous permet d'affirmer a priori que pour chacun des deux jumeaux il y aura environ autant de $+1$ que de -1, les écarts par rapport à l'équilibre étant distribués selon la loi gaussienne. En effet, s'il y avait un déséquilibre à ce niveau, cela voudrait dire que la nature favorise une polarisation au détriment de l'autre ou que l'on pourrait distinguer la gauche de la droite, car l'un des deux côtés comporterait davantage de $+1$ que l'autre. Bien entendu, l'expérience confirme cette invariance.

Nous pouvons calculer à partir du tableau la corrélation empirique R : c'est la moyenne des produits des éléments de la deuxième colonne par ceux correspondants de la troisième ; ou encore : le produit scalaire de la deuxième et de la troisième colonne du tableau, divisé par n.

Le débat lancé par Einstein, Podolski, et Rosen concerne la question suivante : s'il se crée un état objectif des deux jumeaux (ou "élément de réalité physique", comme ils disent dans leur article) *au moment où la molécule diatomique se casse en O*, et que le résultat observé des mesures est l'expression de cet état (peu importe si l'état créé est lui-même aléatoire), alors cet état objectif est causalement indépendant de l'orientation des aimants, d'autant plus que cette orientation peut être modifiée aléatoirement *après* la fission de la molécule, comme c'est effectivement le cas dans l'expérience réelle d'Aspect. Donc selon Einstein, Podolski, et Rosen l'expérience *reproductible* est déjà terminée avec la fission de la molécule : le passage à travers les aimants n'est plus qu'une mesure de ce qui a déjà eu lieu.

Lorsqu'on dit qu'une expérience est reproductible, on entend par là que ce qu'on appelle "les conditions de l'expérience" sont identiques d'une fois sur l'autre. Lorsqu'on répète le lancement d'une pièce de monnaie, en limer le bord modifie ces conditions ; mais que l'observateur siffle une fois la Marseillaise et l'autre fois l'Internationale ne change pas ces conditions car il y a indépendance causale entre l'air sifflé par l'observateur et le processus en cours : donc pour qu'une expérience soit reproductible il n'est pas nécessaire que d'une fois sur l'autre rien ne se modifie dans l'univers ; il est seulement nécessaire que d'une fois sur l'autre ne se modifient que des choses qui sont causalement indépendantes du processus.

Dans la conception d'Einstein, Podolski, Rosen, le résultat des mesures dépend certes des orientations des aimants, mais non l'état objectif des atomes, de même que le diamètre apparent de la planète Mars dépend de sa distance à la Terre, mais non son diamètre réel. Une meilleure comparaison serait plutôt la suivante : les composantes d'un vecteur déterminé dépendent des axes de coordonnées, mais non le vecteur lui-même.

Le point essentiel est le suivant : on peut à juste titre être convaincu que l'état des jumeaux, qui est déterminé au moment de la division, est indépendant de l'orientation des aimants, puisque de toute évidence les aimants sont loin du point O et n'ont rien à voir avec le processus de division. En outre la division a lieu *avant* la mesure : admettre que l'état des jumeaux dépend de l'orientation des aimants revient à admettre que l'avenir peut influer sur le passé.

Mais il reste la question : qu'entend-on par l'*état des jumeaux*? Lorsque nous avons présenté le lancement d'un dé ou d'une pièce de monnaie comme une expérience reproductible, nous avons sous-entendu que les mécanismes complexes qui déterminent le mouvement de la pièce ou du dé pouvaient être *isolés* du reste du monde : il était "évident" que l'air sifflé par l'observateur n'influait pas sur le processus qu'il était en train d'observer. Si l'air sifflé par l'observateur changeait la loi de probabilité, nous ne pourrions plus dire que le lancement du dé est une expérience reproductible : il faudrait considérer une expérience élargie, consistant à siffler toujours le même air chaque fois qu'on lance le dé. Ce qui rend une expérience reproductible est son isolement par rapport au reste de l'univers. Cette notion d'expérience reproductible est le paradigme fondamental du Calcul des probabilités, nous l'avons rencontré dès le début de cet ouvrage : en **I.2**, ce qui distingue la distribution de trois boules dans deux boîtes de la distribution de trois bosons entre deux états quantiques de même énergie peut s'exprimer ainsi : dans le cas des boules, on répète bien trois fois la même expérience, mais pas dans le cas des bosons. En effet, la manière dont le premier boson remplit les deux états modifie les conditions de l'expérience pour le deuxième boson, donc l'expérience n'est pas répétée à l'identique. Avec les boules, bien que la première devait choisir entre deux boîtes vides alors que la seconde doit choisir entre deux boîtes dont l'une est déjà occupée, l'expérience se reproduit pourtant, car l'état d'occupation des deux boîtes n'a pas d'influence. Autrement dit, le fait que l'expérience soit reproductible est lié à la *séparation causale* entre les boules ; à l'inverse il n'y a pas de séparation causale entre les bosons.

XIII. 2. Interprétation de J. S. Bell.

Afin de décrire la situation imaginée par Einstein, Podolski, et Rosen, où le processus de création de la paire de jumeaux serait reproductible sans y inclure la position des analyseurs, Bell propose de considérer une variable aléatoire λ dont on ne précise pas la nature (elle peut être vectorielle, de dimension aussi élevée qu'on voudra), qui décrit l'état interne de chaque jumeau : comme les jumeaux sont supposés identiques ou plus exactement parfaitement symétriques l'un de l'autre, on peut dire que la même valeur de λ les caractérise tous les deux. Cette approche est exactement celle que nous avons discutée plusieurs fois déjà dans cet ouvrage : un processus est caractérisé par des probabilités a priori, qui restent les mêmes chaque fois qu'on le reproduit dans des conditions identiques, et qui par conséquent coïncideront avec les probabilités empiriques mesurées sur un grand nombre de répétitions indépendantes du processus (cf. **X.3**). Bell applique soigneusement le paradigme du Calcul des probabilités.

Si Bell ne précise pas la nature de λ, c'est pour atteindre le maximum de généralité. S'il la tient pour une variable aléatoire, c'est parce qu'il admet que la création des jumeaux puisse ne pas être elle-même déterministe. L'idée sous-jacente était que la connaissance préalable d'un état interne devait permettre de prédire l'issue de la mesure (le processus qui se déroule à l'intérieur d'un aimant analyseur pendant que la particule le traverse), comme la connaissance exacte de la trajectoire d'un dé devrait permettre de prédire sur quelle face il s'arrêtera. Mais on accepte que l'état interne puisse être lui-même trop difficile à prévoir à partir du mécanisme détaillé de la division, tout comme la trajectoire du dé est trop difficile à prévoir à partir des conditions initiales.

Autrement dit, Bell se propose de tester réellement une hypothèse de principe. Pour y parvenir, il s'efforce de ne rien présupposer en dehors de cette prédictibilité de principe.

Donc Bell suppose que si λ est aléatoire, du moins sa valeur va déterminer univoquement l'issue de la mesure ; cela se traduit mathématiquement par le fait que le signe de la déviation doit être pour chacun des deux jumeaux une fonction de λ. Mais comme on admet aussi que la déviation peut être influencée par l'aimant traversé (c'est-à-dire que le résultat de la mesure n'est pas une propriété de la particule isolée et que la mesure perturbe celle-ci), on doit donc considérer que le signe X de la déviation est une fonction non seulement de λ, mais aussi de l'orientation a de l'analyseur, qu'on note $X(a, \lambda)$. Ainsi λ est une variable aléatoire, mais X est une fonction univoquement déterminée de a et de λ. Les deux jumeaux étant symétriques mais non identiques, la manière dont X dépend de λ n'est pas forcément la même à droite qu'à gauche ; par exemple on pourrait avoir $X_D(a, \lambda) = X_G(a, -\lambda)$, où plus généralement $X_D(a, \lambda) = X_G(a, \sigma(\lambda))$ où σ désigne une symétrie de l'espace où λ prend ses valeurs. Le point essentiel est que $X_G(a, \lambda)$ dépend de l'orientation a de l'analyseur de gauche, mais pas de l'orientation de l'analyseur de droite ; de même $X_D(b, \lambda)$ dépend de l'orientation b de l'analyseur de droite, mais pas de l'orientation de l'analyseur de gauche.

Que signifient ces hypothèses ? Dire que λ est une variable aléatoire, et que X est une fonction des variables a et λ, est du langage mathématique. Mais si nous voulons interpréter correctement l'expérience E.P.R. nous devons comprendre le sens concret de ces formulations mathématiques. Lorsqu'on dit que X est une fonction des variables a et λ, cela signifie (c'est la *définition* mathématique d'une fonction) que si on donne à a et à λ des valeurs déterminées, alors $X(a, \lambda)$ aura une valeur déterminée. En langage imagé, cela signifie que, une fois fixées les valeurs de a et λ, aucun hasard n'intervient plus pour la détermination de la valeur de $X(a, \lambda)$. Mais λ elle-même est, dans les hypothèses de Bell, une variable aléatoire, dont la valeur sera choisie par le hasard au cours du processus de création de la paire de jumeaux. Ainsi, les hypothèses exprimées ci-dessus dans le langage mathématique se traduisent dans le langage imagé par : “le hasard intervient *une seule fois* dans toute l'expérience E.P.R. et ce moment est celui de la création de la paire ; il n'intervient plus ensuite ; en particulier il n'intervient plus pendant la traversée de l'analyseur".

On peut encore proposer une légère variante : admettre que a est aussi une variable aléatoire. Rappelons un point important de l'expérience d'Aspect : elle a été construite de telle sorte que l'orientation des polariseurs soit modifiée aléatoirement par des commutateurs ultra-rapides ($\sim 10^8$ commutations par seconde) sous les conditions suivantes :

a) elle est modifiée *après* la création de la paire par désexcitation de l'atome de Calcium ;

b) la commutation est effectuée de telle sorte que le changement de direction à gauche et la mesure à droite (ou vice-versa) soient des événements séparés par un intervalle du genre espace, autrement dit qu'un signal lumineux parti du polariseur de gauche au moment de sa commutation aléatoire parvienne au polariseur de droite après la mesure du jumeau de droite.

Dans ce cas le hasard intervient aussi au moment du choix, pour chaque analyseur, entre deux orientations. Mais le point essentiel demeure : le hasard n'intervient pas pendant la traversée des analyseurs ; en un mot : les jeux sont faits avant.

On peut donc résumer la *signification* des hypothèses de Bell en disant simplement :

1. La mesure effectuée sur chaque jumeau est indépendante de la position de l'autre analyseur.

2. Aucun hasard n'intervient plus pendant la traversée des analyseurs.

Enfin, une autre variante encore consiste à renoncer même à la deuxième condition ci-dessus. Nous l'étudierons plus loin ; mais là on renonce alors à la possibilité d'une prédiction à partir d'un hypothétique état intrinsèque, donc on s'écarte du postulat E.P.R. Aujourd'hui on se rend compte, comme nous verrons plus loin, que la question n'est pas du tout liée à la seconde condition ci-dessus ; mais elle était essentielle dans la conception d'Einstein, Podolski, et Rosen.

Nous rapportons d'abord ci-après le raisonnement mathématique que Bell a publié en 1964. Ensuite nous passerons aux variantes.

Afin d'obtenir un test effectif de son hypothèse, Bell propose alors de considérer la corrélation entre X_G et X_D pour des orientations quelconques a à gauche et b à droite. Soit $\{\lambda_j\ ,\ (p_j)\}$ la loi de probabilité de λ. La corrélation est

$$\mathbf{E}(a,b) = \mathbf{E}(X_G(a,\lambda)\cdot X_D(b,\lambda)) = \sum_j p_j\, X_G(a,\lambda_j)\cdot X_D(b,\lambda_j) \quad (XIII.1.)$$

Ces corrélations sont mesurables expérimentalement, puisqu'il suffit de répéter un grand nombre N de fois l'expérience et d'établir la corrélation empirique entre les résultats de gauche et ceux de droite. Certes, leur mesure effective est difficile car dans une expérience concrète les résultats significatifs sont mêlés à de nombreux phénomènes indésirables et doivent être soigneusement triés ; mais nous faisons confiance aux expérimentateurs. Les résultats de ces N expériences peuvent être enregistrés sous la forme d'un tableau comme celui présenté plus haut (page 385) : la corrélation empirique R est la moyenne des produits des éléments de la deuxième colonne du tableau par les éléments correspondants de la troisième colonne. D'après la loi des grands nombres (puisque l'expérience est reproductible) la corrélation empirique R sera d'autant plus proche de la corrélation théorique $\mathbf{E}(a,b)$ que N sera plus grand, les écarts supérieurs à plusieurs fois $\sqrt{N}$ ne se produisant pratiquement jamais.

Supposons qu'on effectue quatre séries d'expériences : dans la première on orientera l'analyseur selon a_1 à gauche et b_1 à droite ; dans la seconde a_1 à gauche et b_2 à droite ; dans la troisième a_2 à gauche et b_1 à droite ; dans la quatrième a_2 à gauche et b_2 à droite. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(a_1,b_1) - \mathbf{E}(a_1,b_2) = \qquad (XIII.2.)\\
&= \sum_j p_j \Big[X_G(a_1,\lambda_j)\cdot X_D(b_1,\lambda_j) - X_G(a_1,\lambda_j)\cdot X_D(b_2,\lambda_j)\Big]\\
&= \sum_j p_j \Big[X_G(a_1,\lambda_j)\cdot X_D(b_1,\lambda_j)\Big(1 \pm X_G(a_2,\lambda_j)\cdot X_D(b_2,\lambda_j)\Big)\Big]\\
&\quad - \sum_j p_j \Big[X_G(a_1,\lambda_j)\cdot X_D(b_2,\lambda_j)\Big(1 \pm X_G(a_2,\lambda_j)\cdot X_D(b_1,\lambda_j)\Big)\Big]
\end{aligned}$$

On a simplement rajouté les termes précédés de $\pm$ qui s'annulent mutuellement. Étant donné que $X_G(a,\lambda_j)$ et $X_D(b,\lambda_j)$ ne prennent jamais d'autre valeur que $+1$ ou -1, les expressions de la forme $1 \pm X_G(a,\lambda_j)\cdot X_D(b,\lambda_j)$ sont toutes positives et les expressions en facteur de la forme $X_G(a,\lambda_j)\cdot X_D(b,\lambda_j)$ sont égales à 1 en valeur absolue, donc d'après l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}(a_1,b_1) - \mathbf{E}(a_1,b_2)| \quad &\leq \quad \sum_j p_j \Big(1 \pm X_G(a_2,\lambda_j)\cdot X_D(b_2,\lambda_j)\Big) +\\
&\qquad + \sum_j p_j \Big(1 \pm X_G(a_2,\lambda_j)\cdot X_D(b_1,\lambda_j)\Big)\\
&\leq \quad 2 \pm \Big(\mathbf{E}(a_2,b_2) + \mathbf{E}(a_2,b_1)\Big) \qquad (XIII.3.)
\end{aligned}$$

d'où on déduit

$$|\mathbf{E}(a_1,b_1) - \mathbf{E}(a_1,b_2) + \mathbf{E}(a_2,b_2) + \mathbf{E}(a_2,b_1)| \quad \leq \quad 2 \qquad (XIII.4.)$$

$$|-\mathbf{E}(a_1,b_1)+\mathbf{E}(a_1,b_2)+\mathbf{E}(a_2,b_2)+\mathbf{E}(a_2,b_1)| \quad \leq \quad 2 \qquad (XIII.5.)$$

Cela reste évidemment vrai si on permute a_1 avec a_2 ou b_1 avec b_2, donc on a forcément aussi

$$|\mathbf{E}(a_1,b_1)+\mathbf{E}(a_1,b_2)-\mathbf{E}(a_2,b_2)+\mathbf{E}(a_2,b_1)| \quad \leq \quad 2 \qquad (XIII.6.)$$
$$|\mathbf{E}(a_1,b_1)+\mathbf{E}(a_1,b_2)+\mathbf{E}(a_2,b_2)-\mathbf{E}(a_2,b_1)| \quad \leq \quad 2 \qquad (XIII.7.)$$

N'importe laquelle de ces quatre inégalités est appelée *inégalité de Bell*. Elles résultent donc mathématiquement des hypothèses préalables, à savoir que X_G et X_D sont des *fonctions* de λ et de l'orientation de l'analyseur respectif.

Le problème est maintenant que ces inégalités sont violées par la Mécanique quantique. Celle-ci prévoit en effet que $\mathbf{E}(a,b) = -\cos\theta$, où θ est l'angle entre les directions a et b. D'après la Mécanique quantique on aurait donc

$$\begin{aligned} Q &= |\mathbf{E}(a_1,b_1)+\mathbf{E}(a_1,b_2)+\mathbf{E}(a_2,b_2)-\mathbf{E}(a_2,b_1)| \qquad (XIII.8.)\\ &= |\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3-\cos\theta_4| \qquad (XIII.9.)\end{aligned}$$

où θ_1 est l'angle entre a_1 et b_1, θ_2 l'angle entre a_1 et b_2, θ_3 l'angle entre a_2 et b_1, et θ_4 l'angle entre a_2 et b_2. Choisissons alors ces quatre angles comme sur la figure 59.

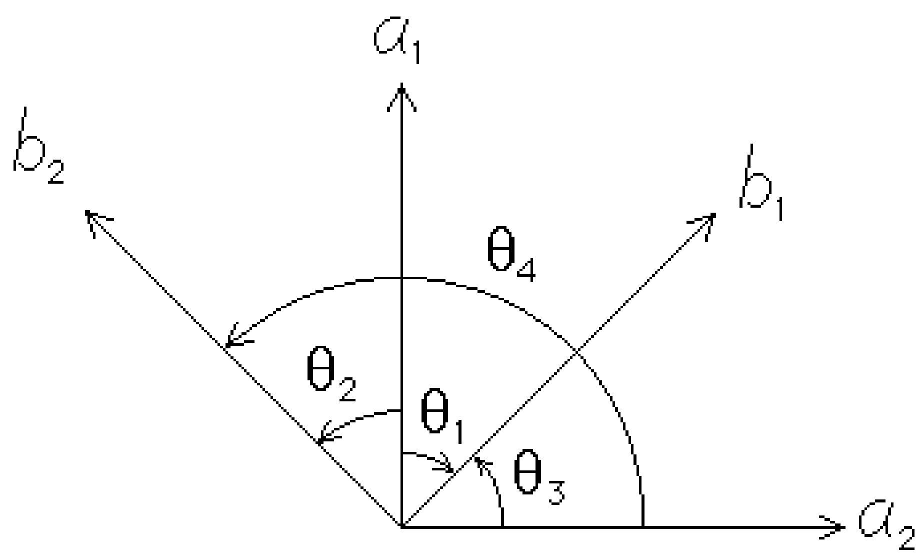


figure 59

Cette configuration particulière des quatre directions a_1, a_2, b_1, et b_2 correspond au maximum de la combinaison $XIII.9$. des quatre cosinus. Dans cette configuration particulière on trouve que $Q = 2\sqrt{2}$. Or, d'après l'inégalité $XIII.7$, on devrait avoir $Q \leq 2$.

Nous ne présenterons pas ici une démonstration déductive du fait que $\mathbf{E}(a,b) = -\cos\theta$ à partir du formalisme de la Mécanique quantique. Mais indiquons-en les raisons. Par des considérations générales d'invariance, on peut conclure que les corrélations $\mathbf{E}(a,b)$ ne doivent dépendre que de l'angle θ entre les deux directions. Cela résulte simplement de ce que les résultats doivent être les mêmes si on tourne globalement tout le dispositif dans l'espace (sinon l'expérience distinguerait une direction privilégiée). Par ailleurs, d'après un principe de la Mécanique quantique appelé principe de correspondance, le spin de la particule doit s'identifier à un moment cinétique lorsqu'on prend sa moyenne sur un grand nombre de particules. C'est ce principe qui impose que la fonction de θ mentionnée soit obligatoirement $-\cos\theta$.

La nature se comporte comme le dit la Mécanique quantique, et non selon les hypothèses qui conduisent à l'inégalité de Bell. La discussion des conditions de l'expérience devrait maintenant nous permettre de voir ce qui est faux dans ces hypothèses. Puisque Bell les a exprimées sous une forme mathématique rigoureuse, il devrait être possible de trouver l'origine exacte de l'erreur. Deux conclusions possibles viennent immédiatement à l'esprit :

Possibilité N° 1. Nous avons supposé que $X_G(a,\lambda)$ ne dépendait pas de b, ni $X_D(b,\lambda)$ de a ; pour expliquer la violation de l'inégalité de Bell on pourrait donc admettre que X_G et X_D sont des fonctions de a *et* de b, $X_G(a,b,\lambda)$ et $X_D(b,a,\lambda)$. On peut en effet se convaincre facilement que la démonstration ci-dessus de l'inégalité ne marche plus quand X_G ou X_D dépend à la fois de a et de b.

Possibilité N° 2. Nous avons vu que l'hypothèse revenait à exclure toute action du hasard postérieure à la création de la paire ou à la fixation de l'orientation des analyseurs. On peut donc également renoncer à cela. Ainsi, si on exclut la possibilité $N°1$, la Mécanique quantique impliquerait que le hasard intervient *nécessairement* pendant que la particule traverse l'aimant, et l'expérience d'Aspect prouverait définitivement qu'il en est bien ainsi.

Il s'agit là des deux possibilités qui viennent le plus naturellement à l'esprit ; du moins d'après ce qu'on peut en juger en voyant l'évolution historique du débat [je soutiens plutôt que l'erreur est dans l'hypothèse *non explicitement formulée* que les probabilités p_j qui interviennent dans $XIII.1$, $XIII.2$, et $XIII.3$, sont indépendantes de a et b ; cette hypothèse fausse est cependant logique si on part du principe que les jeux sont faits au moment de la création des jumeaux]. Toutes les spéculations sans fin sur «l'influence » qu'exercerait chacun des deux analyseurs sur l'autre ont été inspirées par la prise en compte exclusive et *a priori*, sans effort critique, de la possibilité $N°1$. Certes la possibilité $N°2$ aurait permis une échappatoire, mais elle ne résoud rien. Avant d'entreprendre la discussion à la section suivante, voyons tout de suite pourquoi cela ne résoud rien.

C'est justement dans le but de tester la possibilité $N°2$ que des extensions des hypothèses de Bell ont été étudiées dans les années 1970. Nous les rapportons ci-dessous sous la forme la plus générale possible.

Il s'agit de voir si on peut préserver la description par un état interne qui conserverait la corrélation entre les deux jumeaux sous la forme d'un paramètre λ, en renonçant à ce que souhaitait Einstein, c'est-à-dire en renonçant à l'idée que cet état interne détermine la déviation. Comme nous avons pu nous en convaincre, ce renoncement s'exprime par la possibilité $N°2$, que le hasard intervienne une seconde fois pendant la traversée des aimants. Autrement dit, nous n'exigeons plus que le paramètre λ détermine le signe $+$ ou $-$ de la déviation, nous exigeons seulement encore qu'il détermine la loi de probabilité de ce signe. Bien entendu, la loi de probabilité en question dépend aussi de l'orientation de l'analyseur, *mais pas de celui traversé par l'autre jumeau.* Cela se traduira par l'indépendance stochastique entre tout événement relatif à l'analyseur de gauche et tout événement relatif à l'analyseur de droite.

Mathématiquement, on le formulera ainsi : pour une valeur de λ fixée, appelons $q(a, \lambda)$ la probabilité pour que la déviation dans l'aimant de gauche soit $-$, et $1 - q(a, \lambda)$ la probabilité pour que la déviation soit $+$. Autrement dit nous supposons maintenant que la fonction $X_G(a, \lambda)$ est toujours une fonction de a et λ, mais à valeurs aléatoires, de loi $\{+1, (1-q)\ ;\ -1, (q)\}$. Si $\{\lambda_j\,, (p_j)\}$ est la loi de probabilité de λ, la règle des probabilités conditionnelles $IV.4$, dont nous avons vu qu'elle était indépendante de la manière dont le hasard intervenait, nous dit que la probabilité d'avoir le même signe de déviation pour les deux jumeaux est

$$\begin{aligned} P_+(a,b) &= \qquad\qquad (XIII.10.) \\ &= \sum_j \Big\{[1-q(a,\lambda_j)][1-q(b,\lambda_j)] + q(a,\lambda_j)\, q(b,\lambda_j)\Big\}\, p_j \end{aligned}$$

En effet, cela est bien l'application de la règle $IV.4$ en prenant comme famille exhaustive d'événements les E_j : "la variable λ prend la valeur λ_j". L'indépendance causale des événements relatifs à des analyseurs différents se traduit mathématiquement par l'indépendance stochastique, c'est-à-dire par les produits $[1 - q(a, \lambda_j)][1 - q(b, \lambda_j)]$ (probabilité d'avoir + à gauche et + à droite) et $q(a, \lambda_j)\, q(b, \lambda_j)$ (probabilité d'avoir − à gauche et − à droite). Enfin, la somme de ces produits exprime que les deux événements "+ à gauche et + à droite" et "− à gauche et − à droite" sont disjoints. Nous avons ainsi appliqué à la lettre les principes du Calcul des probabilités.

La loi $\{\lambda_j\ ,\ (p_j)\}$ qui décrit le hasard pendant la création de la paire, et la loi des la variables maintenant aléatoires $X_G(a, \lambda_j)$ et $X_D(b, \lambda_j)$ qui décrit une nouvelle intervention du hasard pendant la traversée de l'aimant, peuvent être absolument quelconques : la seule contrainte qu'on leur impose est d'être des lois de probabilité, c'est-à-dire que

$$(1) \qquad \sum_j p_j = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } j: \quad p_j \geq 0$$

$$(2) \qquad \text{pour tout } j \text{ et pour toute direction } a: \quad 0 \leq q(a, \lambda_j) \leq 1$$

On peut alors montrer que *sous cette seule contrainte*, les corrélations possibles issues de ces lois, $R(a, b) = P_+(a, b) - P_-(a, b)$, satisferont aussi l'inégalité de Bell. La démonstration est semblable à celle de Bell que nous avons donnée plus haut, elle n'en diffère que par une complication technique. Calculons en effet, comme nous l'avions fait en vue de l'inégalité de Bell proprement dite (cf. $XIII.1$), la corrélation $\mathbf{E}(a, b)$ dans ce nouveau cas. On a cette fois d'après $XIII.10$:

$$\mathbf{E}(a, b) = P_+(a, b) - P_-(a, b) = \qquad (XIII.11)$$

$$= \sum_j \Big\{1 - 2\, q(a, \lambda_j) - 2\, q(b, \lambda_j) + 4\, q(a, \lambda_j)\, q(a, \lambda_j)\Big\}\, p_j$$

$$= \sum_j \Big\{[1 - 2\, q(a, \lambda_j)] \cdot [1 - 2\, q(b, \lambda_j)]\Big\}\, p_j$$

Remarquons maintenant que pour obtenir l'inégalité de Bell nous pouvons procéder exactement de la même manière que dans $XIII.2$ et $XIII.3$, en remplaçant formellement $X_G(a, \lambda_j)$ par $1 - 2\, q(a, \lambda_j)$ et $X_D(b, \lambda_j)$ par $1 - 2\, q(b, \lambda_j)$. En effet, en dehors du simple jeu combinatoire des a_1, a_2, b_1, b_2 qui se reproduit ici, la seule propriété des variables $X_G(a, \lambda_j)$ et $X_D(b, \lambda_j)$ qui intervenait était d'être dans l'intervalle $[-1, +1]$. Or puisque $q(a, \lambda_j)$ et $q(b, \lambda_j)$ sont des *probabilités*, elles sont comprises entre 0 et 1, donc les quantités $1 - 2\, q(a, \lambda_j)$ et $1 - 2\, q(b, \lambda_j)$ seront comprises entre -1 et $+1$, ce qui suffit à entraîner les différentes inégalités de Bell.

Autrement dit, la possibilité $N°2$ est incompatible avec les faits.

On voit que l'inégalité de Bell sera vérifiée dès lors que la corrélation $\mathbf{E}(a, b)$ peut s'écrire sous la forme $\sum_j f(a, j)\, f(b, j)\, p_j$ où les p_j sont ≥ 0 et tels que $\sum_j p_j = 1$, et où la fonction $(a,j) \mapsto f(a,j)$ prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,+1]$. Les quantités p_j peuvent être n'importe quoi, de même que les $f(a,j)$: pourvu qu'elles vérifient ces conditions, l'inégalité de Bell aura lieu. Ceci est *indépendant de toute interprétation* des quantités p_j et $f(a,j)$.

Comme il s'agit d'une corrélation de signes, on peut toujours la décomposer en $\mathbf{E}(a,b) = P_{a,b}(++) + P_{a,b}(--) - P_{a,b}(+-) - P_{a,b}(-+)$, où $P_{a,b}(++)$ désigne la probabilité d'avoir le signe $+$ dans les deux analyeurs, $P_{a,b}(+-)$ celle d'avoir $+$ dans l'analyseur de gauche et $-$ dans celui de droite, etc. Ces probabilités dépendent comme il se doit des directions a et b. Il est facile de vérifier que si on a

$$\begin{aligned}
P_{a,b}(++) &= \sum_j P_a(+|\,j)\,P_b(+|\,j)\,p_j \\
P_{a,b}(+-) &= \sum_j P_a(+|\,j)\,P_b(-|\,j)\,p_j \\
P_{a,b}(-+) &= \sum_j P_a(-|\,j)\,P_b(+|\,j)\,p_j \\
P_{a,b}(--) &= \sum_j P_a(-|\,j)\,P_b(-|\,j)\,p_j
\end{aligned} \qquad (XIII.12.)$$

alors on aura

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(a,b) = \sum_j \Big\{ & P_a(+|\,j)\,P_b(+|\,j) - P_a(+|\,j)\,P_b(-|\,j) - \\
& - P_a(-|\,j)\,P_b(+|\,j) + P_a(-|\,j)\,P_b(-|\,j) \Big\}\, p_j \\
= \sum_j & \,[P_a(+|\,j) - P_a(-|\,j)]\,[P_b(+|\,j) - P_b(-|\,j)]\,p_j
\end{aligned}$$

ce qui est bien de la forme $\sum_j f(a,j)\,f(b,j)\,p_j$ avec $f(a,j) = P_a(+|\,j) - P_a(-|\,j)$. Si les nombres $P_a(+|\,j)$, $P_a(-|\,j)$, $P_b(+|\,j)$, et $P_b(-|\,j)$ sont compris entre 0 et 1, les nombres $f(a,j) = P_a(+|\,j) - P_a(-|\,j)$ et $f(b,j) = P_b(+|\,j) - P_b(-|\,j)$ seront, eux, compris entre -1 et $+1$; si en outre les p_j sont tous compris entre 0 et 1 et tels que $\sum_j p_j = 1$, l'inégalité de Bell sera *forcément* vérifiée, indépendamment de toute interprétation des quantités p_j, $P_a(\pm|\,j)$, $P_b(\pm|\,j)$.

Il se trouve maintenant que $(XIII.12)$ peut s'interpréter comme la formule des probabilités conditionnelles *IV*.4, avec la famille exhaustive d'événements $E_j : \{\lambda = \lambda_j\}$. Il y a toutefois un détail spécifique : les probabilités conditionnelles $P_{a,b}(++|\,E_j)$, $P_{a,b}(+-|\,E_j)$, etc, ont été décomposées sous la forme $P_{a,b}(++|\,E_j) = P_a(+|\,j) \cdot P_b(+|\,j)$, etc. Cela semble logique car c'est la propriété du produit qui caractérise l'indépendance stochastique, censée refléter ici l'indépendance causale entre ce qui se passe dans chacun des deux analyseurs.

La relation purement formelle et indépendante de toute interprétation qui conduit de $(XIII.12)$ à l'inégalité de Bell montre que si cette dernière est fausse, c'est qu'il y a quelque chose de faux dans $(XIII.12)$. Or il reste encore des hypothèses suspectes.

Possibilité N°3. Est-il légitime d'appliquer la propriété du produit $P_{a,b}(++\,|\,E_j) = P_a(+|\,j)\cdot P_b(+|\,j)$, etc ?

Possibilité N°4. Est-il légitime d'appliquer la formule des probabilités conditionnelles avec une famille exhaustive E_j ?

Possibilité N°5. Est-il légitime de supposer que les probabilités p_j sont *indépendantes* des directions a et b ?

XIII. 3. Discussion.

Dans cette discussion, nous laisserons de côté la question de savoir si la formulation mathématique de Bell correspond bien à l'idée que se faisaient Einstein, Podolski, et Rosen. Cela est sans importance pour nous ici, puisque nous discutons le paradoxe E.P.R. uniquement pour mieux comprendre la vraie nature de la causalité et des probabilités, et non dans un but de recherche historique. Ce que nous devons comprendre est la signification exacte des hypothèses de Bell, et par contrecoup, la signification exacte des probabilités qui interviennent, aussi bien dans les hypothèses fausses de Bell que dans les corrélations vraies prédites par la Mécanique quantique.

Il s'agit simplement de passer en revue les hypothèses, explicites ou non, qui permettent la démonstration, exposée ci-dessus, des inégalités de Bell. Commençons donc par la possibilité $N°1$. Elle est surprenante. Elle revient à admettre que la traversée d'un analyseur par un jumeau est influencée par la position de l'autre analyseur, ce qui est une violation flagrante de la causalité. En effet, dire que pour une valeur λ_j de λ, le signe X_G de la déviation dépend aussi de b implique une influence. Or on ne peut échapper au raisonnement suivant : “les deux jumeaux sont rigoureusement symétriques et ignorent l'orientation que prendra l'analyseur de Stern-Gerlach ou le polariseur d'Aspect lorsqu'ils le traverseront. Comme ces analyseurs sont très éloignés l'un de l'autre ($14\,m.$ dans l'expérience d'Aspect), la mesure sur un jumeau ne peut pas influencer la mesure sur l'autre. Or, les corrélations en $-\cos\theta$ prouvent le contraire, etc.” Une telle influence à distance contredit le principe de Relativité selon lequel aucune influence ne peut se propager plus vite que la lumière ; c'est sans aucun doute la raison pour laquelle Einstein a eu tant de mal à l'accepter. Dans l'une des versions de l'expérience d'Aspect les polariseurs ont été spécialement équipés de commutateurs optiques capables de modifier l'orientation en 10^{-8} secondes, de sorte que si cette modification se produit à droite à un instant t, un signal se déplaçant à la vitesse de la lumière ne pourra atteindre l'autre polariseur situé à 14 mètres de là que $5 \cdot 10^{-8}$ secondes plus tard; par conséquent, si la commutation d'orientation a eu lieu à droite après la création de la paire de photons jumeaux, mais *avant* que le jumeau de droite ait traversé le polariseur, le signal apportant l'information du changement arrivera à gauche *après* que le jumeau de gauche ait traversé le polariseur, c'est-à-dire trop tard.

Reprenez un instant la démonstration de l'inégalité de Bell : vous constatez aisément qu'elle ne marche plus si on suppose que la fonction $X_G(a, \lambda)$ dépend aussi de b, ou que la fonction $X_D(b, \lambda)$ dépend aussi de a.

Or dire que X_G dépend de b est évidemment l'expression mathématique d'une influence de l'orientation à droite sur ce qui se passe à gauche. D'où le surgissement, comme l'écrit François Lurçat (voir note 5 ci-après), "d'images fantastiques : les deux grains de poussière seraient couplés par une interaction physique de type nouveau, inconnu. Certains physiciens sont allés jusqu'aux conséquences les plus déraisonnables : par exemple de vouloir donner un fondement physique à la parapsychologie, avec la transmission de pensée, etc..."

Il y a pourtant d'autres façons de saboter la démonstration des inégalités de Bell : la possibilité $N°2$ ne le permettant pas, il reste les possibilités $N°3$, $N°4$, et $N°5$ que nous soumettons maintenant à la critique.

La possibilité $N°3$ n'est qu'une extension de la possibilité $N°1$. En effet, en supposant que les probabilités conditonnelles $P_{a,b}(+ + \mid E_j)$ sont le produit $P_a(+ \mid j) \cdot P_b(+ \mid j)$, on exprime l'hypothèse d'une indépendance stochastique entre les analyseurs, on nie la possibilité d'une influence de l'un sur l'autre. Sans cette hypothèse d'indépendance, la démonstration des inégalités de Bell ne marche plus et la théorie devient donc compatible avec les faits quantiques ; le prix à payer pour cela est l'acceptation d'une mystérieuse influence. C'est la même chose qu'avec la possibilité $N°1$, sauf qu'on admet en plus une seconde intervention du hasard pendant la traversée des analyseurs.

Signalons au passage que cette expression : «pendant la traversée des analyseurs» devrait être proscrite, car ce n'est pas la Mécanique quantique, mais les préjugés classiques qui font imaginer une trajectoire dont une partie comporterait la traversée d'un analyseur. Le phénomène quantique qui se produit n'est pas censé être divisible en morceaux. Nous y reviendrons plus loin, pour le moment ne nous dispersons pas.

Pour quelqu'un qui reste accroché aux idées classiques et refuse la philosophie quantique, la possibilité $N°3$ est sans intérêt ; en effet, la possibilité $N°1$ empêche tout aussi bien les inégalités de Bell, mais sans postuler une seconde intervention du hasard. Quant à l'inconvénient — admettre une influence —, il subsiste dans les deux cas. Autant choisir la possibilité $N°1$.

J'ai gardé pour la fin l'examen des possibilités $N°4$ et $N°5$, car elles ne permettent pas (contrairement à 1 et 3) de sauver les apparences classiques.

Voyons ce que donne l'examen de la possibilité $N°4$. La formule des probabilités conditionnelles s'applique-t-elle vraiment ? Ce n'est pas une évidence. Dans tous les cours d'initiation à la Mécanique quantique on discute l'expérience des trous de Young(4) et on montre que si on considère les deux événements (qui justement n'en sont pas) E_j : "la particule est passée par le trou $N°j$" ($j = 1$ ou 2), et qu'on applique la formule des probabilités conditionnelles, on obtient un résultat faux.

Dans cet ouvrage nous avons présenté un formalisme pour le Calcul des probabilités, basé sur l'espace des épreuves équiprobables et une notion d'événement représenté par un sous-ensemble. Cela s'applique fort bien à un grand nombre de problèmes variés, même quantiques. Mais dans l'expérience des trous de Young, pour que les faux événements E_j : "la particule est passée par le trou $N°j$" puissent en être de vrais, il eût fallu qu'ils soient deux sous-ensembles complémentaires d'un espace des épreuves. Or on est absolument incapable de dire ce que seraient dans ce cas les épreuves ! On succombe simplement à l'habitude du langage courant. Nous avons observé en **IV.4** que la formule des probabilités conditionnelles pouvait s'appliquer en ignorant tout de l'espace Ω ; nous l'avons alors appliquée à un problème de génétique (les mariages consanguins) dans lequel nous étions également incapables de dire ce qu'étaient les épreuves. Mais le fait que *ça marche* justifiait a posteriori le procédé. Cela marche parce que la combinaison des chromosomes s'effectue dans l'espace et est donc semblable aux combinaisons de boules. Dans le cas des événements E_j : "la particule est passée par le trou $N°j$", cela ne marche pas. On aurait pu croire que l'hypothèse d'un espace des épreuves n'était nécessaire que pour démontrer la formule des probabilités conditionnelles, et qu'une fois celle-ci obtenue on pourrait enlever l'hypothèse comme les maçons enlèvent l'échafaudage une

(4) La discussion qui va suivre suppose connue du lecteur au moins la leçon classique d'introduction à la Mécanique quantique, qui en principe fait partie de la culture générale. Voir par exemple R. P. Feynman *Mécanique quantique*, chapitre **I**.

fois le mur construit. Toutefois l'exemple de la Mécanique quantique est là pour montrer que la parabole de l'échafaudage n'est pas toujours juste : dans les mécanismes de l'hérédité, tout se passe comme s'il y avait un espace Ω, bien qu'on soit incapable de le trouver ; dans le cas des pseudo-événements E_j, cela *ne se passe pas comme si*.

L'expérience des trous de Young n'exclut pourtant pas toujours que les E_j soient de véritables événements auxquels on puisse appliquer la formule des probabilités conditionnelles : il suffit pour cela de modifier le dispositif expérimental de telle sorte que la particule puisse être détectée dans les trous. La Mécanique quantique dit alors que les E_j, définis sous la forme plus explicite “la particule est détectée dans le trou $N°j$ ” sont de véritables événements ; dans ce cas on peut leur appliquer la formule des probabilités conditionnelles.

Quelle est la différence ? Du point de vue de la Physique, les résultats sont changés, et cela n'a rien de paradoxal puisqu'on a modifié le dispositif expérimental. Mais nous voudrions savoir dans quels cas un événement décrit par une phrase entre guillemets du langage courant est réellement représentable sous la forme d'un ensemble d'épreuves équiprobables et dans quels cas il ne l'est pas. Pour répondre à cette question on ne peut que répéter encore ce que Heisenberg et Bohr[5] se sont tués à dire (mais en le traduisant dans le langage du présent ouvrage) : pour qu'un événement comme “la particule est passée par le trou $N°j$ ” soit un véritable événement, il faut que le “passage par le trou” soit un phénomène physiquement réel. Or dans la nature (selon la Mécanique quantique), un phénomène est réel s'il laisse une trace objective, c'est-à-dire si quelque part un atome ou un électron a eu son état modifié par suite du phénomène. Si un atome situé sur le bord du trou $N°j$ a eu son état modifié par suite du passage de la particule, alors l'événement E_j est un véritable événement ; mais dans un tel cas, si on reproduit l'expérience un grand nombre de fois pour observer la distribution statistique des particules ayant ainsi traversé les trous en laissant une trace objective de leur passage, on ne verra aucune figure d'interférence. La trace du passage doit exister *objectivement*, il n'est donc

(5) Les articles originaux de référence sont Werner Heisenberg *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik* (Zeitschrift für Physik, vol. **43**, 1927, pages 172 – 198) et Niels Bohr *Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik* (Naturwissenschaften, vol. **16**, 1928, pages 245 – 271). Ensuite Bohr s'est plusieurs fois exprimé à nouveau ; avec le recul du temps, et jusqu'à sa mort il a clarifié ses interprétations, qu'on trouvera dans le recueil classique : Niels Bohr, *Physique atomique et connaissance humaine*, Gauthier-Villars, Paris, 1972. Enfin, les idées qui sont développées dans tous ces articles historiques sont très bien expliquées dans le livre de François Lurçat *Niels Bohr et la Physique quantique*, Éd. du Seuil, Paris, 2001, coll *Points Sciences*.

pas nécessaire qu'un observateur l'ait remarquée : si on n'a rien détecté à proximité des trous, mais que la figure d'interférence est absente, on peut *en déduire* qu'une trace inconnue du passage a dû être laissée quelque part. Inversement, si la figure d'interférence est présente, on peut en déduire qu'aucune trace objective du passage à travers l'un ou l'autre des trous n'a été laissée, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune *réalité* correspondant à l'idée "la particule est passée par l'un ou l'autre des trous". Et si cette idée ne correspond à aucune réalité, il ne peut pas non plus lui correspondre une épreuve. Nous avons commencé cet ouvrage en parlant (métaphoriquement) du *niveau où intervient le hasard* pour désigner la nature des épreuves parmi lesquelles la Fortune choisit. Nous pouvons ici ajouter une précision : pour qu'une épreuve puisse être choisie par la Fortune dans le monde réel, il faut que cette épreuve soit un phénomène réalisable. Cette précision allait sans dire pour des problèmes de boules, mais ne va plus du tout sans dire pour des phénomènes quantiques. Toute la difficulté provient de ce qu'une perception correcte de la réalité est requise. Quelqu'un qui voudrait déterminer un espace des épreuves relatif à l'expérience des trous de Young devrait chercher l'ensemble des manières de laisser une trace et ne pourrait donc pas ignorer le rôle joué par les atomes de l'écran. Sans doute devrait-il, pour accomplir complètement ce travail, aller au delà de la Physique connue actuellement. L'intuition héritée de la Physique classique nous pousse tout au contraire à nous représenter les épreuves sous la forme des trajectoires possibles pour une particule ponctuelle dans l'espace (trajectoires qui dans le cas des trous de Young passeraient par l'un des trous). De là vient l'illusion que la phrase "la particule passe par le trou $N°j$" représente un événement : cette phrase représente bien un ensemble de trajectoires, mais pas un ensemble de traces pouvant être laissées *réellement* par la particule dans son environnement matériel. Elle est en réalité autant dépourvue de sens concret que la phrase "le dé marque $\pi\sqrt{2}$ points".

Revenons à l'expérience *E.P.R.* et à la discussion basée sur l'inégalité de Bell. Cette inégalité a été démontrée en utilisant la formule des probabilités conditionnelles. On a donc admis implicitement que, même si l'espace Ω n'est pas connu (de sorte que la loi de la variable aléatoire λ ne pourrait être calculée a priori, mais seulement mesurée par des statistiques), du moins tout se passe comme s'il en existait un. Nous avons discuté ce principe à la section **4.4** ("Relativité du hasard"), et remarqué qu'il s'appliquait parfaitement au problème des mariages consanguins. Mais le fait qu'il s'applique n'est pas prouvé par nos calculs : il est prouvé par l'observation de la réalité.

Lorsque nous disons que le signe de la déviation par les aimants est une fonction de a (l'orientation de l'aimant) et de λ (la variable aléatoire qui représenterait l'état de la particule), nous émettons implicitement une hypothèse très forte, à savoir que cette règle s'applique ; or l'expérience des trous de Young est là pour montrer qu'elle ne s'applique pas toujours. La Mécanique quantique nous dit que l'événement $E_j : \{\lambda = \lambda_j\}$ ("la variable aléatoire λ prend la valeur particulière λ_j") n'est un événement réel que si le fait que λ prenne la valeur particulière λ_j se traduit quelque part par une trace objective. On ne peut appliquer la règle des probabilités conditionnelles qu'à des événements réalisables. De quel droit en effet pourrions nous affirmer que si une phrase exprimée en langage imagé semble avoir un sens (pour des points imaginaires que nous nous représentons dans l'espace en fermant les yeux), il y aura nécessairement des épreuves réelles qui lui correspondent ? À quelles épreuves réelles peut correspondre la phrase "le dé marque un nombre de points compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$" ? Que donnerait un calcul utilisant la règle des probabilités conditionnelles, si l'on considère la famille exhaustive d'événements E_j : "le dé marque un nombre de points compris entre $\sqrt{j}$ et $\sqrt{j+1}$" ($j = 0, 1, 2 \ldots 35$) et en posant $\mathcal{P}(E_j) = \frac{1}{6}\,(\sqrt{j+1} - \sqrt{j}\,)$?

Certains auteurs avides de sensation ont proclamé (à la suite des discussions sur ces phénomènes étranges) que "la réalité n'existe donc pas". Mais conclure que la réalité n'existe pas repose sur le raisonnement par l'absurde "si la réalité existait, elle serait décrite par la variable λ, or ...". On pourrait par le même raisonnement conclure à l'inexistence de la réalité chaque fois que celle-ci ne se plierait pas entièrement à une représentation mathématique prédéfinie (et ce raisonnement idiot a été tenu plus d'une fois, déjà bien avant la Mécanique quantique). Une telle affirmation n'a strictement aucun sens en l'absence d'une définition préalable, précise et opératoire, du mot réalité[(6)]. Au contraire la Mécanique quantique rend plus forte et plus rigoureuse la notion de réalité : elle montre qu'un événement réel est ce qui laisse quelque part une trace matérielle, même si celle-ci échappe à l'observateur humain. Elle fournit même un moyen concret de savoir si un événement se produit réellement (par exemple si des atomes situés a proximité de l'un des trous de Young subissent un changement d'état au passage de la particule) : il suffit de constater statistiquement, dans un montage adéquat, qu'une figure d'interférence s'estompe. De toute façon nous sommes ici dans un ouvrage sérieux et n'avons pas à discuter les sophismes d'auteurs à sensation. La question qui nous intéresse est de savoir quelles sont les conditions de validité du paradigme de l'espace des épreuves.

[(6)] Notons qu'Einstein, Podolski, et Rosen ont, justement, proposé dans leur article une telle définition précise, opératoire, et réfutable ; et on peut déduire de l'expérience que cette définition a été réfutée.

On voit que les phénomènes quantiques sont une magnifique illustration du mauvais usage qu'on peut en faire ; non que la règle $\mathcal{P}(A) = \#A \;/\; \#\Omega$ puisse dans certains cas être fausse, mais les épreuves doivent correspondre à des possibilités réelles et non à des extrapolations purement imaginaires de nos perceptions.

Prenons encore un exemple. Tout au début de l'ouvrage, nous avons examiné (cf. **I.2**, premier exemple) les répartitions possibles de trois boules dans deux boîtes. Selon la statistique de Bose, il n'y avait que quatre épreuves possibles (les modes d'occupation) et si on comparait aux huit distributions classiques, on pouvait concevoir les événements

E : "particule $N°1$ dans boîte $\mathcal{A}$, particules $N°2$ et $N°3$ dans boîte $\mathcal{B}$"

F : "particule $N°2$ dans boîte $\mathcal{A}$, particules $N°1$ et $N°3$ dans boîte $\mathcal{B}$"

G : "particule $N°3$ dans boîte $\mathcal{A}$, particules $N°1$ et $N°2$ dans boîte $\mathcal{B}$"

dont la réunion constituerait le mode d'occupation "une particule dans la boîte $\mathcal{A}$, deux particules dans la boîte $\mathcal{B}$" Mais ces événements ne sont pas réels ; nous les avons rêvés. Pour qu'ils soient réels, il faudrait qu'il existe objectivement un moyen de distinguer les trois particules. Un tel moyen existe pour les boules, même si elles sont absolument identiques : ce sont leurs trajectoires dans l'espace. Nous avons insisté sur la possibilité de calculer des probabilités sans connaître l'espace des épreuves, en recourant à la règle des probabilités conditionnelles, et illustré cela sur un exemple issu de la génétique. Mais si nous voulions appliquer cette règle avec les événements E, F, G ci-dessus, en écrivant

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X \mid E) \cdot \mathcal{P}(E) + \mathcal{P}(X \mid F) \cdot \mathcal{P}(F) + \mathcal{P}(X \mid G) \cdot \mathcal{P}(G) \,,$$

et en attribuant à chacun des événements E, F, G une probabilité égale par exemple au tiers de celle du mode d'occupation, nous aboutirions facilement à des résultats faux (c'est-à-dire contredits par l'expérience). Pourtant il a été possible de déterminer un espace des épreuves réel, celui des modes d'occupation. Nous avons vu en **II.5** que les modes d'occupation peuvent être décrits par des représentations spatiales (par exemple les graphiques formés de $\bigcirc$ et de $|$), alors que l'*individualité* des particules de Bose ne correspond à aucune représentation spatiale. Un ensemble fini comme Ω peut toujours être représenté par des ensembles de points sur du papier ou à défaut, si son cardinal est trop grand, être imaginé avec notre intuition de l'espace. Cela ne semble pas être toujours le cas pour la réalité quantique.

L'expérience d'Aspect montre que la formulation mathématique qui conduit à l'inégalité de Bell ne correspond pas à la réalité. C'est tout ce qu'elle montre réellement. Ce n'est pas tant le Calcul des probabilités qui trouve là ses limites, que la manière toujours spatiale de concevoir les épreuves. Certes, on pourrait conserver une description mathématique qui tiendrait pour réels des événements tels que $E_j : \{\lambda = \lambda_j\}$, en recourant à la possibilité $N°1$ pour compenser la différence entre la réalité quantique et les illusions de nos représentations : la variable aléatoire $X_G(a, \lambda)$ dépendrait aussi de b et deviendrait $X_G(a, b, \lambda)$. Mais il semble clair que ce schéma ne serait qu'un artifice, car l'erreur est plus profonde. Tout comme les événements "la particule est passée par le trou $N°j$", les événements "$\lambda = \lambda_j$" ne correspondent à aucun phénomène réel ; ce qui est réel est le résultat observé *après* la traversée des deux analyseurs, et il est logique que cela dépende des directions a et b (en fait de θ). Un événement "$\lambda = \lambda_j$" qui se serait produit avant que a et b n'aient été fixées est un fantasme et non un phénomène. Tout d'abord, l'idée d'une influence non causale (remontant le temps ou voyageant plus vite que la lumière) est difficilement acceptable. A priori et dans l'absolu, on ne peut toutefois pas plus écarter cette éventualité que le fluide de Kepler (cf. la fin du chapitre **XII**), la force gravitationnelle de Newton, ou l'éther de Maxwell. Mais s'agit-il vraiment d'une influence ?

Newton a lui-même insisté sur le fait que la force n'est qu'une représentation intellectuelle et que seule la loi quantitative en $1/r^2$ était objective. Maxwell a écrit cela de la même façon à propos de l'éther. On pourrait dire ici aussi que cela ne coûte rien d'imaginer intellectuellement une influence qui se propage d'un aimant à l'autre pour favoriser l'un des sens de déviation au détriment de l'autre : seule serait objective, de toute façon, la loi quantitative des corrélations en $-\cos\theta$. Cela nous ramène encore à la discussion sur la nature de la causalité à la fin du chapitre **XII**. La phrase célèbre de Galilée "Le monde est un livre écrit par le Créateur, et la langue dans laquelle il est écrit est la Géométrie" peut également s'interpréter dans le même sens : pour dire ce qu'est un fluide ou une force il faut recourir à l'expérience subjective, par exemple la sensation qu'on éprouve en tirant sur une corde pour hisser un objet lourd ; le langage humain exprime ces sensations. Mais la langue du Grand Livre ne les exprime pas, d'autant moins que ce livre était déjà écrit avant qu'il y ait des êtres vivants pour éprouver lesdites sensations. Donc $m\vec{\gamma} = -K\vec{r}/r^3$ ou $R = -\cos\theta$ sont pour Galilée des phrases du langage de l'univers, mais les représentations imagées d'un ange qui pousserait les planètes pour les rapprocher du Soleil ou d'un signal émis par l'un des aimants pour aller informer l'autre sur son orientation n'en sont pas.

J'ai gardé pour la fin la discussion de la possibilité $N°5$. D'un point de vue purement mathématique, on voit bien que la démonstration de l'inégalité de Bell ne fonctionne plus si les probabilités p_j dépendent de a et b. Notons tout de suite que les p_j ne peuvent pas être des fonctions de a seul, ni de b seul : cela contredirait la symétrie du problème. Quand il s'agissait de X_G ou X_D, postuler que X_G est une fonction de a seul était cohérent, puisque la valeur de X_G était censée ne concerner que le jumeau de gauche, qui ne traverse pas l'analyseur de droite. Quant aux p_j, soit ils concernent seulement la création de la paire de jumeaux *avant* toute approche des analyseurs (et alors il est raisonnable de les supposer indépendants de a et b), soit ils concernent l'ensemble du processus (et alors ils doivent dépendre, et symétriquement, de a et b). En fait, comme le résultat de l'expérience ne saurait dépendre non plus de l'orientation globale du dispositif, les p_j doivent être des fonctions de l'angle θ entre a et b.

Mais que signifie concrètement cette hypothèse purement mathématique que les p_j sont des fonctions de l'angle θ ? Que traduit-elle ?

En précisant les hypothèses du théorème de Bell, nous avons insisté sur le fait que la variable λ reçoit ses valeurs du hasard *au moment de la création de la paire*, et que ce choix du hasard détermine entièrement la suite des événements. C'est ce qui avait été retenu par la possibilité $N°1$. En admettant maintenant que la loi p_j de cette variable λ dépend de l'angle θ, on jette cette hypothèse aux orties. Considérer les p_j comme des fonctions de θ, c'est admettre que la variable λ est déterminée dès le départ par l'ensemble du dispositif. C'est donc admettre que le phénomène observé ne se décompose pas en plusieurs parties, dont la première, disons la partie $P1$, serait la création de la paire dans un environnement spatio-temporel isotrope (le voisinage immédiat du point O), la partie $P2$ la propagation du jumeau de gauche et la partie $P3$ celle du jumeau de droite, puis enfin les parties $P4$ et $P5$ qui seraient respectivement la traversée de l'analyseur de gauche par le jumeau de gauche et la traversée de l'analyseur de droite par le jumeau de droite. On pourrait ajouter les parties $P6$ et $P7$ correspondant aux processus qui sont à l'oeuvre dans les analyseurs et qui les conduisent à dévier les particules qui les traversent. C'est cette décomposition du phénomène en parties qui exprime le mieux les présupposés de la Mécanique classique : on imagine les jumeaux comme des «grains de poussière» qui à chaque instant peuvent être localisés quelque part dans l'espace, et alors on peut parler du «moment où ils sont encore au voisinage du point O», du «moment où ils sont en route vers l'analyseur», du «moment où ils traversent l'analyseur» ...

Or tout cela a été inventé de toutes pièces par l'homme, et rajouté à ce que dit la nature. La leçon tirée par Niels Bohr de l'aventure quantique, c'est que les phénomènes comme celui que nous discutons ne sont pas divisibles.

Personne n'a jamais vu la création de la paire, ni vu les particules en route vers un analyseur ou un détecteur ; ce qu'on a vu, c'est un signal électrique envoyé par un détecteur vers un galvanomètre, aujourd'hui vers une carte de conversion analogique-digital; ou bien la décomposition d'une molécule de bromure d'argent en argent métallique dans une émulsion photographique, aujourd'hui la saturation d'un pixel C.C.D.

Il existe sans doute une vérité cachée qui explique «ce qu'on voit». Mais nous n'avons pas encore les moyens de l'appréhender, ni observationnellement, ni conceptuellement. Cela exige une certaine modestie: il ne s'agit pas de «positivisme», il s'agit de critiquer des préjugés.

Revenons encore à l'examen de la possibilité $N°5$. En postulant que la loi p_j dépend de l'angle θ, on exclut la divisibilité du phénomène. C'est justement là un des enseignements de Niels Bohr. Dans un texte de 1954 (*Unité de la connaissance*)[7], Bohr écrivit ceci:

> (...) il est en effet plus correct, dans une description objective, de ne se servir du mot de phénomène que pour rapporter des observations obtenues dans des conditions parfaitement définies, dont la description implique celle de tout le dispositif expérimental. Avec cette terminologie le problème de l'observation en physique quantique perd toute complexité particulière. De plus, elle nous rappelle directement que tout phénomène atomique est «définitivement clos», en ce sens que son observation est fondée sur des enregistrements obtenus au moyen de dispositifs d'amplification au fonctionnement irréversible, tels que les traces permanentes laissées sur une plaque photographique par des électrons pénétrant dans l'émulsion.

John Archibald Wheeler, qui eut des discussions approfondies avec Bohr dans les années 1950, en garda une sentence qu'il répéta d'innombrables fois:

> *"No elementary quantum phenomenon is yet a phenomenon until it is a registred phenomenon, brought to a close by an irreversible act of amplification."*

> *"Un phénomène quantique élémentaire n'est pas encore un phénomène tant qu'il n'est pas un phénomène enregistré, amené à bonne fin par un processus d'amplification irréversible.*

Comment le langage abstrait du Calcul des probabilités, développé dans le présent ouvrage, peut-il traduire une assertion aussi matérialiste? À mon avis, en posant que la loi p_j dépend d'emblée de l'ensemble du dispositif expérimental, ou plus exactement des paramètres qui en décrivent le modèle idéalisé; ici c'est le paramètre angulaire θ.

Bien entendu, c'est la dépendance de p_j par rapport à a et b qui sabote la démonstration du théorème de Bell, car dans la combinaison $\mathbf{E}(a_1, b_1) - \mathbf{E}(a_1, b_2) + \mathbf{E}(a_2, b_2) + \mathbf{E}(a_2, b_1)$ les coefficients p_j sont différents

[7] Voir *Physique atomique et connaissance humaine* (déjà cité à la note 5), page 110.

dans chacun des quatre termes. Que devait signifier l'hypothèse que p_j est indépendant de a et b? Tout simplement que la première partie du phénomène, que nous avions désignée plus haut par $P1$, est reproductible entre les quatre mesures (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2). L'inégalité de Bell exprime ainsi l'hypothèse que

a) le phénomène est divisible en parties;

b) l'une de ces parties est reproduite à l'identique bien qu'on change les orientations a et b.

Or la Mécanique quantique dit que le phénomène n'est pas divisible, qu'en refaisant les mesures avec d'autres orientations, on ne reproduit pas le phénomène à l'identique, et qu'il n'existe pas une partie du phénomène qui, elle, serait reproduite à l'identique.

Voilà l'erreur.

Un dernier point pour que la discussion soit complète: supposer que les p_j dépendent de θ suffit pour saboter la démonstration des inégalités de Bell; il n'y a pas besoin en outre de supposer que $X_G(a, \lambda)$ est aussi fonction de b (et $X_D(b, \lambda)$ fonction de a). On conserve alors l'expression mathématique du fait qu'il n'y a pas d'influence exercée entre les analyseurs. Ce à quoi on renonce, c'est la division du phénomène. On n'a donc pas besoin de l'image fantastique de «deux grains de poussière qui seraient couplés par une interaction physique de type nouveau, inconnu». Postuler des fonctions $p_j(\theta)$ n'exprime pas une influence d'un analyseur sur l'autre, mais que la variable λ, pour peu qu'elle ait un sens, n'est pas fixée (par le hasard ou par ce qu'on voudra) au début du phénomène — il n'y a pas de début du phénomène — mais pendant tout son déroulement.

XIII. 4. Un modèle géométrique.

Peut-être la discussion a-t-elle été jusqu'ici trop mathématique pour montrer à quel point la possibilité $N°1$ est conditionnée par de simples habitudes de pensée. La démonstration de l'inégalité de Bell est en effet mathématique et abstraite; cependant elle reflète fidèlement le mode de pensée enseigné dans cet ouvrage; tous les stéréotypes que je me suis efforcé d'inculquer au lecteur y sont mis en oeuvre. Les faits expérimentaux sont là pour montrer que leur validité n'est pas universelle, mais l'excès d'abstraction mathématique peut encore servir de tampon ou d'écran et protéger un certain nombre d'idées fausses. Pour mieux percevoir le sens de l'inégalité de Bell, nous allons construire un modèle géométrique.

Reprenons une à une les caractéristiques vraiment essentielles de l'expérience E.P.R. Chacun des deux aimants ne se caractérise que par son orientation : seule intervient la direction du champ magnétique et de son gradient, tout le reste n'est que du décor. Par conséquent la représentation schématique la plus simple de ces aimants est une simple flèche indiquant cette direction. Pour rendre la représentation plus imagée on imaginera un disque divisé en deux par un diamètre dont on peut distinguer les deux extrémités : par exemple on marquera N (nord) l'une des extrémités et S (sud) l'autre : voir figure 60.

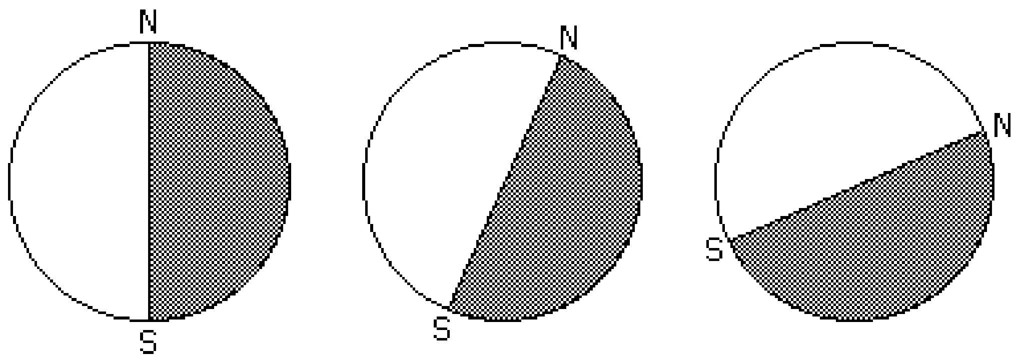


figure 60

Supposons que le spin de chaque particule soit déterminé par un état interne qui serait une direction dans l'espace ; le paramètre décrivant un tel état serait donc un angle φ, compris entre 0 et 2π. Cet angle serait "choisi au hasard" au moment de la création des jumeaux. Dans ce modèle la variable λ de Bell est donc cet angle, et sa loi de probabilité est uniforme sur $[0, 2\pi]$, sinon le processus de création des jumeaux violerait l'invariance de l'espace par rotation ; n'oublions pas, en effet, que dans le schéma de Bell, le hasard intervient au moment de la création de la paire : l'orientation des analyseurs n'a aucune influence sur ce processus. La corrélation entre les deux jumeaux s'exprimera alors comme une symétrie entre les deux angles : si φ_G est l'angle du jumeau de gauche et φ_D est l'angle du jumeau de droite, la corrélation se traduira par une égalité telle que $\varphi_G + \varphi_D = 2\pi$. Ce n'est que l'expression mathématique de la symétrie entre les deux jumeaux.

L'ensemble des valeurs prises par φ est donc représentable par une circonférence, sur laquelle φ_G et φ_D sont diamétralement opposés. Les aimants étant représentés par la flèche NS, on se servira du cercle dont NS est le diamètre pour représenter l'état du jumeau correspondant.

Pour représenter le signe de la déviation des particules (autrement dit le spin) dans l'expérience, nous divisons le cercle en deux moitiés, l'une à droite du diamètre NS, (région blanche sur la figure 60), l'autre à gauche du diamètre NS, (région grisée). Si la particule s'arrête dans la région blanche on attribue le signe $+$, si elle s'arrête dans la région grisée, le signe $-$. Si les deux disques (celui qui représente l'aimant de gauche et celui qui représente l'aimant de droite) ont la même orientation, il est clair que les signes seront toujours opposés, puisque les points d'arrivée des particules sont diamétralement opposés (si l'une s'arrête dans la région blanche, l'autre s'arrêtera dans la région grisée, et vice versa). Donc la corrélation des signes sera -1. Jusque là, tout se passe comme dans l'expérience E.P.R.

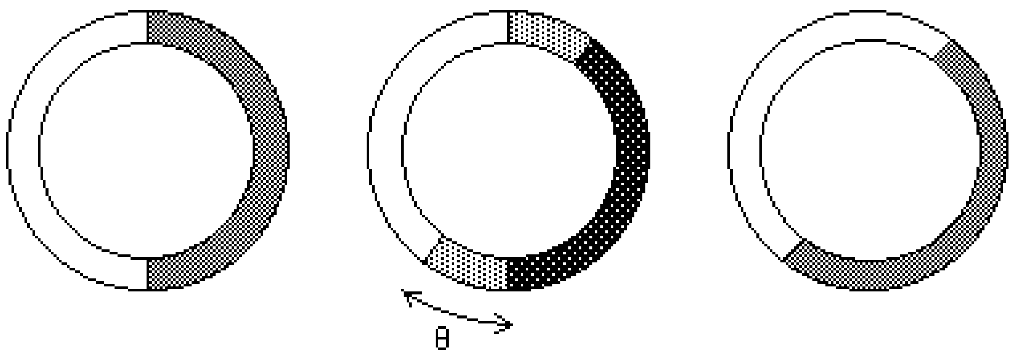


figure 61

Que se passe-t-il si les deux disques (celui "de gauche" et celui "de droite") ont des orientations différentes, formant un angle θ entre elles ? Sur la figure 61 on peut voir les deux disques à gauche et à droite orientés différemment et au milieu la superposition des deux. La zone noire dans le disque du milieu est l'intersection des zones grisées des deux disques de gauche et de droite, la zone blanche l'intersection des deux zones blanches. La zone claire dans le disque du milieu est l'intersection d'une zone grisée avec une zone blanche. Comme les deux particules sont toujours diamétralement opposées, si l'une aboutit dans la zone blanche, l'autre aboutira dans la zone noire et inversement puisque ces zones sont symétriques l'une de l'autre ; dans ce cas leurs signes seront opposés. Mais si l'une des particules aboutit dans la partie claire, l'autre y aboutira aussi puisque les deux zones claires sont également symétriques l'une de l'autre ; les deux particules se verront alors attribuer le même signe. On peut donc dire que la partie du disque formée de la réunion de la zone blanche et de la zone noire est celle qui donnera des signes opposés ($+-$ ou$-+$), et la partie claire est celle qui correspond à des signes égaux ($++$ ou $--$).

Bien entendu les particules de ce modèle géométrique n'ont, intentionnellement, rien de quantique.

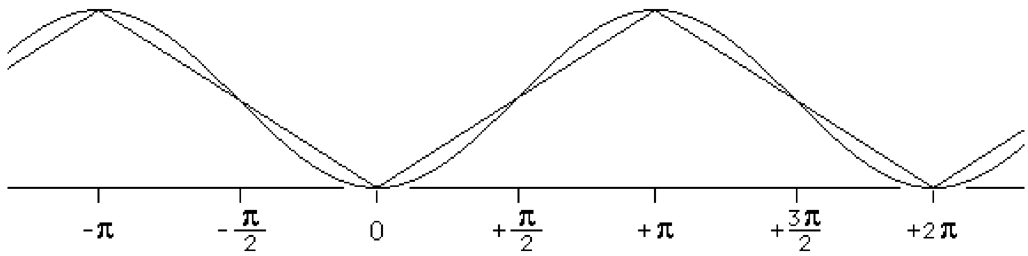
Posons-nous maintenant la question de la *probabilité* d'avoir le même signe ou des signes opposés. Puisque tous les angles θ sont équiprobables, et que la zone claire représente une proportion θ/π de la circonférence complète, la probabilité d'avoir des signes égaux pour les deux particules jumelles est θ/π. Si θ avait été négatif (c'est-à-dire si sur la figure 61 on avait tourné le disque de droite dans le sens opposé), cette proportion serait $|\theta|/\pi$. Cela n'est évidemment valide que pour $-\pi < \theta < +\pi$, car si θ devenait plus grand que π le rapport deviendrait supérieur à 1 et ne serait plus une probabilité ; dans ce cas il faudrait ajouter ou retrancher à θ un multiple de 2π pour le ramener dans cet intervalle. Pour des rotations d'angles plus grands il faut donc compter modulo 2π, autrement dit la probabilité est la fonction périodique $\Phi(\theta)$, de période 2π, qui est égale à $|\theta|/\pi$ sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$. Elle est représentée sur la figure 62 *a*, superposée à la fonction prédite par la Mécanique quantique.

Ce prolongement de la fonction $\Phi(\theta)$ pour des angles θ hors de l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ n'est qu'une commodité purement mathématique, et ne joue aucun rôle concret : on veut simplement dire par là que si par exemple on faisait faire dix tours complets à l'un des analyseurs, sa position effective dans l'espace ne dépendrait que modulo 2π de l'angle dont il aurait tourné, et par conséquent il doit en être de même de la probabilité $\Phi(\theta)$ correspondante.

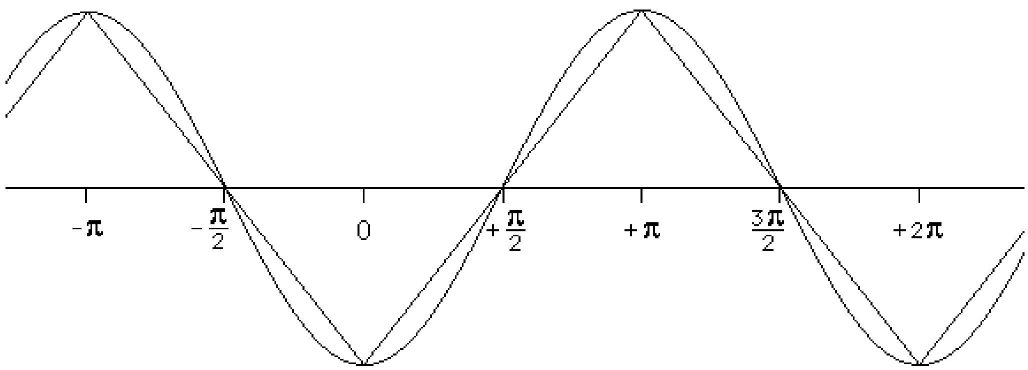
La probabilité que les deux particules obtiennent des signes opposés est alors $1 - \Phi(\theta)$. Quant à la corrélation entre les signes, elle est égale à $\rho = -[1 - \Phi(\theta)] + \Phi(\theta) = 2\Phi(\theta) - 1$. Le graphique de cette corrélation est représenté sur la figure 62 *b*, où il est comparé à la corrélation $-\cos\theta$ de la Mécanique quantique.

Il est facile de vérifier que la corrélation $2\Phi(\theta) - 1$ satisfait l'inégalité de Bell : en particulier si on prend les quatre angles de la figure 59, on trouve $\rho = -2$. Cela correspond bien à ce qu'on a toujours fait dire à l'inégalité de Bell : que la particule est une particule classique.

Mais voici maintenant le point essentiel. Cette corrélation $\rho = 2\Phi(\theta) - 1$ est la conséquence directe de notre hypothèse d'équiprobabilité : que tous les points de la circonférence sont équivalents. La symétrie circulaire est une conséquence nécessaire des hypothèses de Bell, puisque ces hypothèses consistent à admettre que le choix du hasard a été effectué avant que les jumeaux ne traversent les analyseurs, donc indépendamment des orientations que prendront ces derniers. Par contre cette invariance circulaire n'existe plus dans les analyseurs, puisque ceux-ci privilégient une direction particulière. Cela implique que dans le modèle, on pourrait obtenir les corrélations de la Mécanique quantique en renoncant à cette invariance. Et en effet, il suffit de remplacer la fonction $2\Phi(\theta) - 1$ par $-\cos\theta$, ce qui



a) probabilité $\Phi(\theta)$ pour que les particules jumelles soient de même signe (fonction affine par morceaux), comparée à la loi correspondante dans l'expérience E.P.R. quantique (fonction sinusoïdale).



b) corrélation des signes entre les particules jumelles (fonction affine par morceaux), comparée à la corrélation E.P.R. (fonction sinusoïdale).

figure 62

équivaut à remplacer $\Phi(\theta)$ par $\frac{1}{2}[1 - 2\cos\theta] = \sin^2\frac{\theta}{2}$. Si on interprète cela géométriquement (figure 63), on arrive à la conclusion que ce ne sont pas les points de la circonférence qui sont équivalents, mais les points du diamètre sur lesquels se projette orthogonalement le point de la circonférence qui repère le secteur d'arrivée de la particule.

Posons donc que la probabilité pour que l'angle φ d'une particule quantique tombe dans un secteur angulaire compris entre les angles α et β serait, non pas proportionnelle à $\beta - \alpha$, mais à $\cos\alpha - \cos\beta$. Cela exige qu'on choisisse une origine particulière sur la circonférence pour compter les angles : en effet $\beta - \alpha$ est indépendant de l'origine choisie, mais pas $\cos\alpha - \cos\beta$. Autrement dit cela exige qu'on distingue une direction particulière dans le disque. **Mais cela est justement le cas dans l'expérience que nous discutons : le champ magnétique de l'aimant de Stern-Gerlach et son gradient définissent bien une direction particulière**.

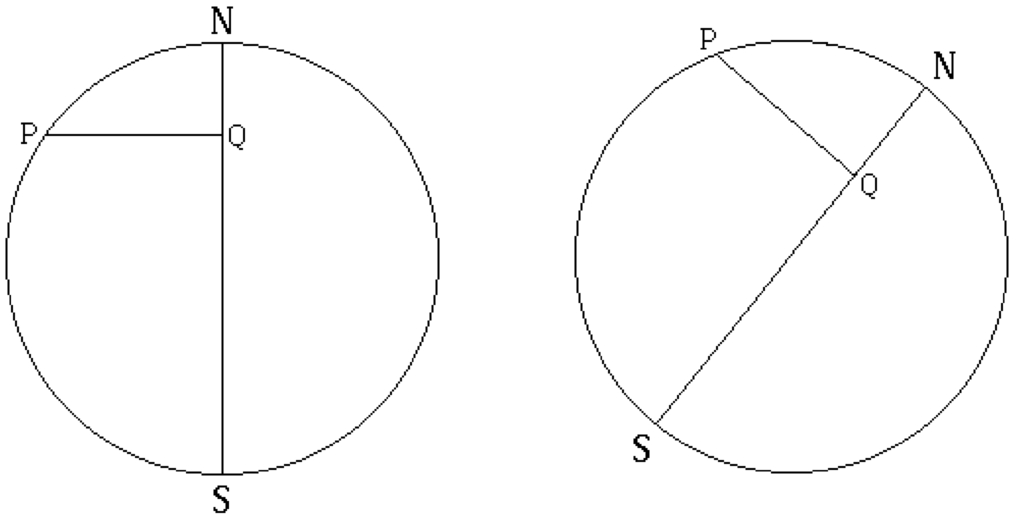


figure 63

On n'obtient pas les mêmes lois de probabilités (et par conséquent pas les mêmes corrélations) selon que les épreuves équiprobables sont les points P de la circonférence ou leurs projections Q sur un diamètre donné, comme cela avait déjà été vu au chapitre **I** à propos des cordes sur un cercle.

Voyons cela de plus près. Avant de discuter des jumeaux, considérons une seule particule et un seul disque qui, dans notre modèle, est la représentation symbolique d'un analyseur de Stern-Gerlach. L'analyseur a par nature une orientation bien définie (celle du champ magnétique et de son gradient). Sur le disque nous la représentons par le diamètre NS (cf. figure 60). Ce diamètre détermine une origine des angles (le point N), à partir de laquelle on compte les angles pour repérer un point de la circonférence. Et maintenant, au lieu d'admettre que tous les angles sont équiprobables, on va admettre que ce sont leurs cosinus qui sont équiprobables. Pour être plus précis : on repère le secteur d'arrivée de la particule par un point P de la circonférence (figure 63) ; ce point se projette sur le diamètre NS en Q, et comme deux points P de la circonférence peuvent se projeter au même point Q on dédouble ce diamètre pour distinguer son côté gauche de son côté droit (donc sa longueur totale est quatre fois le rayon). On pose que la loi de probabilité à laquelle obéit le processus est **l'équiprobabilité des points Q le long du diamètre**. Cette loi pour la variable φ, qui est ici la λ de Bell, a une densité qui dépend de a et de b (en fait de θ), et c'est précisément ce qui a pour effet d'invalider les inégalités de Bell. Ainsi la loi de φ , pour être compatible avec les faits, dépend des directions a et b, ce qui est naturel puisque l'appareil de la figure 58 privilégie ces deux directions. C'est là la conclusion à laquelle conduit l'analyse du modèle géométrique.

À partir de cette loi il est aisé de calculer la probabilité pour que deux particules symétriques (c'est-à-dire telles que $\varphi_G + \varphi_D = 2\pi$) aboutissent toutes deux dans la région claire correspondant au cas où les signes sont opposés (cf. figure 61) : elle est égale à $(1 - \cos\theta)/2$. En effet, les deux particules étant diamétralement opposées, l'événement "elles arrivent toutes deux dans la zone claire" est identique à l'événement "la jumelle de gauche arrive dans la zone claire", ou à l'événement "la jumelle de droite arrive dans la zone claire". La probabilité de cet événement, qui était $|\theta|/\pi$ lorsqu'on partait de l'équiprobabilité des points de la circonférence, est maintenant $\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$, car les points situés sur les deux arcs de cercle correspondants se projettent sur le diamètre NS du disque de gauche (vertical sur la figure 61) selon deux segments de longueur $(1-\cos\theta)\times$ *rayon* chacun ; la longueur totale du diamètre dédoublé étant $4 \times$ *rayon*, le rapport est bien $\frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$. Le calcul a été effectué à partir de la jumelle de gauche, mais cela ne contredit nullement la symétrie entre les deux jumelles : si on avait basé le calcul sur la jumelle de droite, on aurait tout projeté sur le diamètre NS du disque de droite (oblique sur la figure 61), et évidemment trouvé le même résultat.

Les probabilités et les corrélations en $-\cos\theta$ de la Mécanique quantique peuvent donc se calculer a priori en partant non pas de l'équiprobabilité des points de la circonférence, mais de l'équiprobabilité de leurs projections sur le diamètre NS représentant l'orientation de l'analyseur respectif. Cette nouvelle invariance ne se ramène à aucune des invariances macroscopiques de l'espace. L'apparente dépendance par rapport à l'orientation de *l'autre* analyseur ne provient que du comptage des coïncidences de signe : les points sur la circonférence qui représentent les jumeaux de même spin sont situés dans la zone claire de la figure 61, qui est délimitée par les orientations des *deux* aimants. Autrement dit, il faut évidemment connaître l'orientation de l'*autre* analyseur pour délimiter cette zone, mais tant qu'on était dans le domaine classique, cela ne choquait personne car il était tenu pour évident qu'il ne s'agissait pas d'une influence à distance : pour décompter les particules qui ont le même spin que leur jumeau éloigné, on est bien obligé d'aller voir le spin de l'autre jumeau. Dans le cas de la loi quantique, on pourrait cependant penser à première vue que projeter les deux particules sur le même diamètre contredit la localité car l'une des particules serait ainsi projetée selon l'orientation de l'autre analyseur ; mais si on projette chaque particule sur le diamètre de son analyseur on trouve la même loi de probabilité.

À première vue la nouvelle règle d'équiprobabilité est étrange et le modèle étudié ici très artificiel ; mais ce qui est artificiel est beaucoup moins l'équiprobabilité des points du diamètre, que le parti pris de vouloir décrire l'état interne par l'angle φ. Si nous vivions dans le monde quantique, c'est l'introduction de cet angle φ qui nous semblerait absurde. Cependant sa prise en compte dispense d'imaginer des actions physiques à distance. Ce que montre essentiellement cette règle, c'est que le phénomène quantique ne subit pas les invariances euclidiennes, mais celles qui sont créées par "l'appareil de mesure", où les deux directions a et b sont privilégiées ; ce qui au fond est parfaitement logique.

La moralité de cette histoire est la suivante : les corrélations E.P.R. ne résultent pas d'actions à distance, mais simplement du fait que dans le monde quantique (donc à l'échelle atomique) il y a d'autres symétries que celles de l'environnement spatial local et instantané, comme nous l'avons déjà vu en comparant les boules aux particules de Bose. À la section **I.2**, à propos des cordes sur un cercle, nous avions fait remarquer que quelqu'un qui observe leur distribution peut en déduire des renseignements sur la manière dont elles ont été choisies (le niveau où le pur hasard est intervenu). De l'expérience E.P.R. cette personne peut également déduire que ce n'est certainement pas une orientation particulière (un vecteur de moment cinétique) des atomes jumeaux par rapport à l'espace vide que la Fortune a choisi. Également à la section **I.2**, nous avions vu que les particules de Bose différaient des particules classiques (les boules) par la nature de l'invariance. Nous disions que "le hasard pur n'intervenait pas au même niveau" : pour les boules (classiques) il intervenait dans le choix des boîtes, pour les particules de Bose (quantiques) il intervenait dans le choix des modes d'occupation. Nous retrouvons ici la même différence entre le classique et le quantique : les choix équiprobables ne sont pas effectués sur le même type d'épreuves. L'explication des corrélations E.P.R. est que "le hasard pur" ou "la Fortune" choisit les points sur l'axe NS de l'analyseur et non sur la circonférence, tout comme l'explication de la loi de Planck est que "le hasard pur" choisit les modes collectifs d'occupation et non les états individuellement accessibles à chaque photon. Il est bien clair que si on modélise cette situation en prenant pour espace des épreuves l'ensemble des points du diamètre (ou plus artificiellement l'ensemble des points de la circonférence, mais avec la densité compensatoire $\frac{1}{2}\sin\varphi$) le Calcul des probabilités sera applicable aux événements qui en sont des sous-ensembles ; la formule des probabilités conditionnelles sera vraie pour de tels événements, alors que cela n'était pas évident pour la manière dont elle était appliquée dans le raisonnement conduisant à l'inégalité de Bell. Mais cela signifie que "le hasard pur" choisit en tenant compte du rôle particulier joué par le diamètre NS. On retrouve ainsi notre conclusion que la loi p_j de la variable λ (qui, dans notre petit modèle, est l'angle φ), dépend de l'angle θ.

C'est donc bien ici que se trouve l'erreur : l'expérience d'Aspect prouve qu'*il n'existe pas* de variable λ dont la loi est indépendante des directions a et b ; autrement dit :

a) le hasard n'intervient pas avant l'interaction avec les aimants, auquel cas il pourrait ignorer leurs directions, mais sur l'ensemble du processus ;

b) lorsqu'il intervient, l'invariance qui le caractérise n'est pas conditionnée par l'espace vide, mais par les deux directions caractéristiques.

Dans (13.10) par exemple, ce n'est pas l'indépendance stochastique entre les deux analyseurs qui est en cause, mais plus fondamentalement le fait que la loi p_j elle-même dépend des directions. On l'a vu très clairement avec le modèle géométrique.

C'est la seule interprétation raisonnable. L'appel à une «interaction de type nouveau, inconnu» n'est pas raisonnable : elle consiste à donner plus de valeur à des visions purement imaginaires héritées d'habitudes de pensées séculaires, conditionnées par le monde macroscopique. On n'a jamais pu diviser le processus (le *phénomène*), réellement, concrètement, expérimentalement ; il est donc illégitime d'inventer des subdivisions de phénomènes. De telles inventions sont certes une pente naturelle de l'esprit humain : les peuples antiques, éduqués depuis des millénaires dans les cosmologies religieuses et mythiques, étaient tout naturellement enclins à imaginer des dieux invisibles derrière chaque nouveau mystère de la nature. Être rationnel, c'est savoir se méfier de l'imagination et s'incliner devant les révélations de la nature.

L'idée d'une action à distance est liée à l'abandon de l'indépendance stochastique car, comme on l'a vu au chapitre **IV**, celle-ci exprime l'indépendance causale ; l'abandonner revient à admettre une influence. Mais on vient de voir que ce n'est pas l'indépendance stochastique qui est source de l'erreur. Alors qu'il est logique que la loi p_j reflète le type de symétrie créé par la présence des deux directions a et b, rien dans les principes du Calcul des probabilités n'impose une relation causale entre les deux analyseurs. Seule la persistance des conceptions classiques, l'incapacité foncière de renoncer à l'image de la petite bille, conduit à une telle conclusion.

XIII. 5. Conclusion.

Il ne faut pas chercher dans le modèle présenté une explication plus profonde de la Mécanique quantique. Il s'agissait seulement d'illustrer les hypothèses qui conduisent à l'inégalité de Bell sous une forme géométrique moins abstraite que la démonstration la plus générale. La figure 62 montre très concrètement la différence entre le comportement classique et le comportement quantique. L'angle φ (ou plus généralement la variable aléatoire

λ de Bell) exprime le préjugé classique d'une bille *orientée dans l'espace*, qui conduit inévitablement à la fonction affine par morceaux de la figure 62, et qui vérifie l'inégalité de Bell. La courbe qui représente les phénomènes réels est au contraire sinusoïdale, et viole l'inégalité de Bell.

On pourrait ajouter que le phénomène naturel dont nous discutons et qui ne consiste au fond en rien d'autre que la corrélation en $-\cos\theta$ est bien plus qu'un simple constat expérimental et est l'expression des nécessités absolument fondamentales suivantes, que nous avons déjà mentionnées :

a) l'expérience représentée sur la figure 58 est invariante par rotation globale dans l'espace ;

b) macroscopiquement on retrouve la Mécanique classique où le moment cinétique est un vecteur[8].

La condition b) exprime le fait que si on mesure, dans l'aimant de Stern-Gerlach, le «spin selon Ox» pour une grosse particule (non quantique), formée par exemple de $N \geq 1$ quantons de spin $\frac{1}{2}\hbar$ chacun, on doit retrouver les relations de la Mécanique classique et notamment que la composante M_x selon Ox du moment cinétique $\vec{M}$ est égale à $M\cos\alpha$, α étant l'angle entre l'axe Ox et le vecteur $\vec{M}$. Le cosinus qui apparaît dans $M_x = M\cos\alpha$ est lié à celui de la corrélation $\mathbf{E}(a,b) = -\cos\theta$, c'est-à-dire que si $\mathbf{E}(a,b)$ était une fonction de θ autre que $-\cos\theta$, on ne retrouverait plus, à la limite des gros systèmes, la relation $M_x = M\cos\alpha$, M_x étant la somme des «spins selon Ox» de tous les quantons et $M = N \times \frac{1}{2}\hbar$.

En d'autres termes : si l'expérience avait donné tort à la Mécanique quantique et raison à l'inégalité de Bell, on ne comprendrait plus pourquoi le monde macroscopique obéit à la Mécanique classique !

S'il est assez clair après la discussion précédente que les signaux qui partiraient prévenir chaque analyseur de ce qui est arrivé dans l'autre est plutôt de l'ordre des naïvetés comme l'ange qui pousserait les planètes ou les fantasmes d'Archibald de la Cruz, et n'est en tous cas pas nécessaire puisque l'expression mathématique $R = -\cos\theta$ exprime toute l'information que nous possédons, il n'est par contre pas évident du tout que *toute* idée d'état interne doive être abandonnée. Toutefois, pour que le recours à une notion d'état interne plus profonde que ne le permet la Mécanique quantique soit justifié, il faut que ce soit une hypothèse créatrice et non un artifice uniquement destiné à sauver des préjugés.

---

[8] Le fait que la corrélation soit $-\cos\theta$ et non une autre fonction de θ est une conséquence nécessaire de a) et b). Cela a été établi : voir Claude Comte *Symmetry, Relativity, and Quantum Mechanics*, Il Nuovo Cimento B, vol **111** (1996.

En tant qu'auteur de cet ouvrage, je dois à ce propos prévenir les mauvais procès qui pourraient m'être intentés. Dans les discussions ou les polémiques qui ont entouré le problème de l'existence d'un état interne, la position qui consiste à dire "l'expression mathématique $R = -\cos\theta$ exprime toute l'information que nous possédons" a souvent été dénoncée comme positiviste (un terme évidemment péjoratif). Le positivisme, du moins dans le sens péjoratif du mot, est une attitude dogmatique, qui dévalorise ou récuse a priori la recherche d'une vérité plus profonde.

L'un des exemples les plus fameux d'un tel comportement dogmatique a été le refus de l'hypothèse atomique. À partir de *1860*[(9)], R. Clausius, J. C. Maxwell, puis plus tard L. Boltzmann (mais l'idée remonte à Daniel Bernoulli au début du $XVIII^e$ siècle) développèrent une interprétation statistique de la Thermodynamique en postulant que les propriétés liées à la chaleur, notamment pour les gaz, s'expliquent mathématiquement par le mouvement aléatoire des molécules. C'est l'origine de ce qui s'appelle aujourd'hui la *Physique statistique* et le plus grand succès du Calcul des probabilités. Jusque là, la Thermodynamique avait été une théorie purement axiomatique et Boltzmann proposait de l'expliquer à partir d'une vérité plus profonde, celle des mouvements désordonnés, chaotiques (et donc stochastiques) des atomes et des molécules. Beaucoup de physiciens refusèrent une telle interprétation en disant que la réalité des atomes n'est pas prouvée par l'expérience et serait donc une hypothèse purement métaphysique, inutile car "la Thermodynamique axiomatique d'avant 1860 exprime toute l'information que nous possédons".

L'Histoire a donné raison à Clausius, Maxwell, et Boltzmann non pas simplement parce que la réalité des atomes a fini par être prouvée, mais surtout parce que l'hypothèse statistique est créatrice ; par exemple Planck n'aurait pas pu trouver l'explication du rayonnement du corps noir s'il n'avait pas suivi un raisonnement de Physique statistique. Si on possède une interprétation de lois existantes à partir d'une vérité plus profonde, on peut deviner des lois nouvelles.

Pour donner un autre exemple plus proche du sens commun : connaître tous les symptômes cliniques des maladies infectieuses apporte peu de

---

(9) R. Clausius : *Über die Art der Bewegung, die wir Wärme nennen.* Poggendorffer Annalen, vol. **100** (1857).

J. C. Maxwell : *Illustrations of the Dynamical Theory of Gases* Philosophical Magazine (1860).

L. Boltzmann : *Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht.* Wiener Berichte vol. **76** (1877).

moyens pour les combattre ; mais si on sait qu'elles sont produites par des micro-organismes invisibles, on peut chercher un moyen de détruire ceux-ci (asepsie). Dans le but peut-être louable en soi d'écarter la métaphysique, doit-on refuser l'hypothèse des micro-organismes parce qu'elle n'est pas nécessaire pour connaître les symptômes cliniques ? C'est en cela que le positivisme est dogmatique ; les mésaventures de Boltzmann ont fortement discrédité cette position philosophique.

Avec l'expérience *E.P.R.* a été soulevée (notamment par Einstein) la question de savoir s'il n'y aurait pas une *vérité plus profonde* qui expliquerait les lois quantiques comme la Physique statistique explique la Thermodynamique, comme le code génétique explique la transmission de la mucoviscidose, etc. Mais la recherche de cette vérité plus profonde doit partir de l'expérience et non de nos préjugés philosophiques sur la causalité.

Je ne voudrais donc pas être mal compris. En paraphrasant une déclaration célèbre de Heisenberg, j'ai bien écrit "l'expression mathématique $R = -\cos\theta$ exprime toute l'information que nous possédons". Mais je n'ai pas ajouté "inutile de chercher plus loin". Il faut bien voir ceci : l'expérience *E.P.R.* est un défi pour la manière dont nous concevons la causalité ; toutefois l'expérience d'Aspect est une *expérience* et est donc plus sûrement vraie que les préjugés. Chercher une vérité plus profonde doit être le but, mais ce n'est pas être positiviste que de penser que lorsque celle-ci sera connue, elle sera très différente des modèles naïfs que nous inspirent encore une vision de la causalité héritée de la Mécanique classique. L'assertion "l'expression mathématique $R = -\cos\theta$ exprime toute l'information que nous possédons" est parfaitement exacte : nous ne possédons aujourd'hui aucune autre *information.* D'ailleurs — pour prendre un autre exemple digne d'être suivi — Einstein, confronté à la théorie électromagnétique de Maxwell dans laquelle la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs quelles que soient leurs vitesses relatives (confirmée sur ce point par les expériences de Michelson et Morley en 1887), n'a pas cherché des modèles naïfs qui auraient préservé un temps absolu : il a déduit la Relativité de l'*information* apportée par l'expérience de Michelson-Morley. On a souvent accusé Bohr et Heisenberg d'être des positivistes, c'est-à-dire de se conduire comme les adversaires de l'hypothèse moléculaire. Je pense que ce jugement est erroné, voire grossier, et j'espère que ce chapitre qui apporte la rigueur du Calcul des probabilités, aidera à corriger ce jugement.

Mais cet objectif est secondaire : j'espère surtout que cette discussion sur l'expérience E.P.R. aura montré qu'un formalisme mathématique ne constitue jamais une vérité universelle et que la conscience de sa signification réelle doit toujours rester présente.